向量微積分

向量函數：$(f_x(t), f_y(t), f_z(t)) = \vec{f}(t)$
多變數函數：$f(x, y, z)$

1 導函數與積分

$$\begin{aligned}
\vec{f}'(t) &\equiv \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h} \\
&= \left(f'_x(t), f'_y(t), f'_z(t)\right)
\end{aligned}$$

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \left(\int f_x(t)\,dt, \int f_y(t)\,dt, \int f_z(t)\,dt\right)$$

2 微分公式

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(a(t)\,\vec{f}(t)\right) &= a'(t)\,\vec{f}(t) + a(t)\,\vec{f}'(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right) &= \vec{f}'(t)\cdot\vec{g}(t) + \vec{f}(t)\cdot\vec{g}'(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right) &= \vec{f}'(t)\times\vec{g}(t) + \vec{f}(t)\times\vec{g}'(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(a(t))\right) &= \frac{d\vec{f}(a)}{da}\frac{da(t)}{dt}
\end{aligned}$$

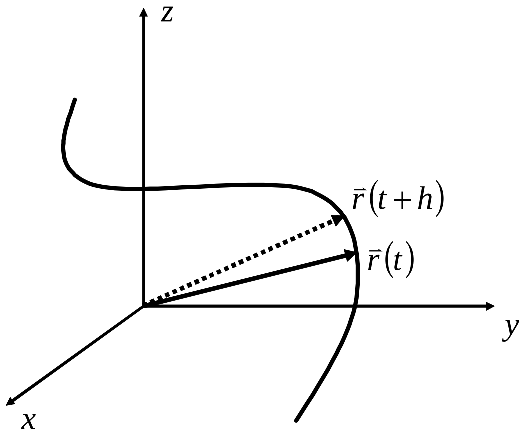
3 空間曲線及其切線向量

參數式：

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

or

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$



$\vec{r}'(t) \equiv \lim_{h\to 0}\left[\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right]/h$ 為曲線在t點的切線向量。若曲線為質點在空間中的軌跡，t為時間，則$\vec{r}'(t)$為質點瞬時速度$\vec{v}(t)$。

4 弧長與速率

複習：平面曲線$\vec{r}=(x(t),y(t))$

小弧長$d\ell=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \implies \ell=\int d\ell=\int\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$

Now，空間曲線

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \\ \ell &= \int\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt \\ &= \int\left|\vec{r}'(t)\right|dt \end{aligned}$$

$|\vec{v}| \equiv \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$瞬時速率$v=\frac{d\ell}{dt}=\left|\vec{r}'(t)\right| \neq \frac{d}{dt}|\vec{r}|$

多變數函數$f(x,y,z)$

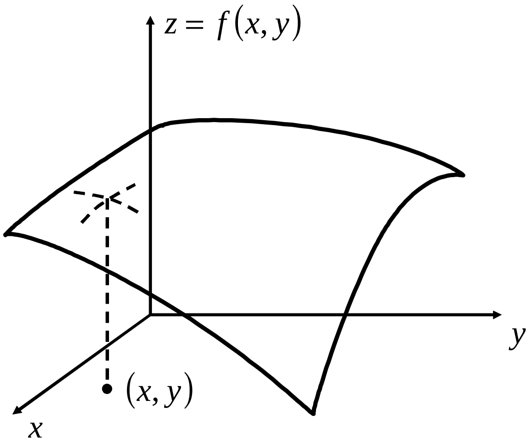
用途：溫度場$T(x,y,z)$、氣壓場$\rho(x,y,z)$．．．

5 偏導數

2 變數函數$f\left(x,y\right)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &\equiv \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}\left(x+h,y\right)-\vec{f}\left(x,y\right)}{h}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &\equiv \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}\left(x,y+h\right)-\vec{f}\left(x,y\right)}{h}
\end{aligned}
$$

3 變數函數依此類推（不易畫圖）



6 多變數函數的連續

f在$\vec{r}_0$為連續指的是

$$\lim_{h\to 0} f\left(\vec{r}_0+\vec{h}\right)=f\left(\vec{r}_0\right),\forall\ \vec{h}\ \text{(任意方向逼近)}$$

Example 1

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{for } \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \text{for } \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}\ \text{在}\left(0,0\right)\text{不連續}$$

$\because$雖然

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,0\right)=\lim_{y\to 0} f\left(0,y\right)=0$$

但沿對角線

$$\lim_{t\to 0} f\left(t,t\right)=\frac{2t^2}{2t^2}=1\neq f\left(0\right)$$

Note: 單變數時，若在x點存在導函數，則在x點必為連續。但多變數時，存在偏導數並不保證連續。e.g.

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{for } \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \text{for } \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

$\left.\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\right|_{x=0}\equiv\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$與$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$均為0（存在），但$f$在$(0,0)$不連續。

7梯度（gradient）

$\frac{\partial f}{\partial x}$與$\frac{\partial f}{\partial y}$分別是$f(x,y)$沿$x$軸與$y$軸的變化率，沿任意方向$\vec{h}$?

但無法定義$\frac{f\left(\vec{r}+\vec{h}\right)-f(\vec{r})}{\vec{h}}$

先考慮（為簡化起見，假設只有 2 個變數）

$$\begin{aligned} & f\left(\vec{r}+\vec{h}\right)-f(\vec{r}) \\ = \; & f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y) \\ = \; & \underbrace{f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y+h_2)}_{\overset{*}{\simeq} h_1\frac{\partial f(x,y+h_2)}{\partial x}\overset{*}{\simeq} h_1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}+\underbrace{f(x,y+h_2)-f(x,y)}_{\overset{*}{\simeq} h_2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} \\ = \; & \vec{h}\cdot\nabla f(x,y)+O\left(\vec{h}\right) \end{aligned}$$

其中，$O\left(\vec{h}\right)$為一減小得比h快的量，而梯度$\nabla f\equiv\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$為一個向量，可推廣至三維。

Note: 打$\star$號處不見得總是成立（e.g., Ex 1.裡的$f(x,y)$）。如果都成立，使得對$\forall\ \vec{h}$，都有$f\left(\vec{r}+\vec{h}\right)-f(\vec{r})=\vec{h}\cdot\nabla f(\vec{r})+O\left(\vec{h}\right)$則稱$f(\vec{r})$在$\vec{r}$<u>可微分</u>。由於在$\vec{h}\to 0$時

$$\left|\vec{h}\cdot\nabla f\right|\le\left|\vec{h}\right|\left|\nabla f\right|\to 0 \text{ and } O\left(\vec{h}\right)\to 0$$

$\therefore$若$f(\vec{r})$在$\vec{r}$點可微分，則f在$\vec{r}$必為連續。

8方向導數

let $\vec{h}=h\hat{u}$ （$\hat{u}$為單位向量），則$f(\vec{r})$沿著$\hat{u}$的方向導數定義為

$$\begin{aligned} f'_{\hat{u}}(\vec{r}) & \equiv \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{r}+h\hat{u})-f(\vec{r})}{h} \\ & = \lim_{h\to 0}\frac{h\hat{u}\cdot\nabla f+O(h\hat{u})}{h} \\ & = \hat{u}\cdot\nabla f \end{aligned}$$

若f為可微分，則方向導數對各方向$\hat{u}$都存在。

由於 $\underset{（當\hat{u}//-\nabla f時）}{-|\nabla f|}\le f'_{\hat{u}}(\vec{r})=|\nabla f|\cos\theta\le\underset{（當\hat{u}//\nabla f時）}{|\nabla f|}$，$\theta$為$\hat{u}$與$\nabla f$間的夾角

$\therefore$ $f(\vec{r})$在∇f方向增加最快（變率為$|\nabla f|$）

$f(\vec{r})$在$-\nabla f$方向減少最快（變率為$-|\nabla f|$）

Example 2 一塊金屬版上溫度分布為

$$T\left(x,y\right)=e^{x}\cos y+e^{y}\cos x$$

問於$(0,0)$點沿哪一個方向溫度增加最快，增加率為何？

Ans.

$$\begin{aligned}\nabla T\left(0,0\right) &= \hat{x}+\hat{y}\\ \left|\nabla T\left(0,0\right)\right| &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Note: 熱流（每秒每cm^{2}通過的能量）在溫度下降最快的方向

$$\vec{J}\left(\vec{r}\right)=-\kappa\nabla T\left(\vec{r}\right)$$ （富利葉定律）

其中κ是熱導率。