

4月17日 數學作業

習題 1. $x, y, z > 0$ $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 9$ 求 $x+y+z$ 的最小值及此時的 x, y, z

$$\text{解: } \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right)^2 \right] [(\sqrt{x})^2 + (y)^2 + (\sqrt{z})^2] \geq (1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow 9(x+y+z) \geq 36 \Rightarrow x+y+z \geq 4$$

等號成立時 $x+y+z$ 有最小值 4

$$\text{此時 } \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{\sqrt{z}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ 代入 } x+y+z = 4$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2 \right)$$

習題 2. 求過點 $A(1, -2, 2)$ $B(6, 0, -1)$ 且與 $2x + 2y - z - 1 = 0$ 垂直之平面方程式

$$\text{解: } \overline{AB} = (5, 2, -3)$$

令所求平面之法向量為 \vec{n}

$$\text{故 } \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4, -1, 6)$$

$$\therefore \text{所求平面} \Rightarrow 4(x-1) - (y+2) + 2(z-6) = 0$$

$$\Rightarrow 4x - y + 2z = 18$$

習題 3. 已知直線 $\begin{cases} x+2y-3z+2=0 \\ 3x-2y+z-5=0 \end{cases}$ 求

(a) 過 $(1, -1, 2)$ 之平面

(b) 與 $2x + y - z - 1 = 0$ 垂直之平面

解: (a) 令此平面方程式

$$(x + 2y - 3x + 1) + k(3x - y + z - 5) = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow (1, -1, 2) \text{ 代入代入得 } \frac{5}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$17x - 6y - z - 21 = 0$$

(b) 令此平面方程式

$$(x + 2y - 3z + 2) + t(3x - 2y + z - 5) = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow (1 + 3t)x + (2 - 2t)y + (-3 + t)z - 5t = 0$$

$$(1 + 3t, 2 - 2t, -3 + t) \cdot (2, 1, -1) = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{7}{3} \text{ 代入得}$$

$$18x - 10y + 16z - 41 = 0$$

習題 4. 已知空間二點 $A(-3, -1, 1)$ $B(2, -2, 3)$ 及平面 $E: 2x + 2y - z - 6 = 0$, 則線段 AB 在平面 E 上的投影長度?

解: $\overline{AB} = (5, -1, 2) \quad \vec{n} = (2, 2, -1)$

$$\overline{AB} \cdot \vec{n} = |\overline{AB}| |\vec{n}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow (10 - 2 - 2) = \sqrt{30} \cdot \sqrt{9} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{30}} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{4}{30}} = \sqrt{\frac{26}{30}}$$

$\therefore \overline{AB}$ 在 E 上投影長度

$$= \overline{AB} \sin \theta = \sqrt{30} \times \sqrt{\frac{26}{30}} = \sqrt{26}$$

