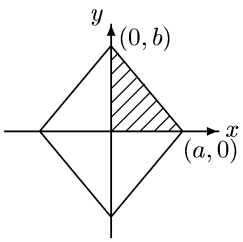
4 月 10 日 數學作業

習題 1. $a, b > 0$ 求 $\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}\le 1$ 之面積



解：4 倍 Δ 面積 $= 4\times\frac{1}{2}\times ab = 2ab$

習題 2. 求 $|x+y|+|x-2y|\le 3$ 之面積

解：

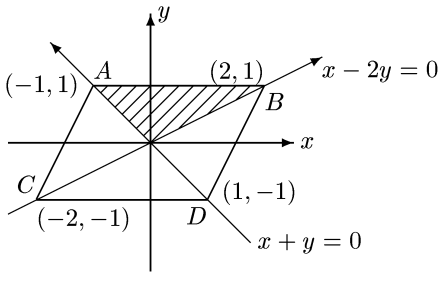
$\begin{cases} x-2y=\pm 3 \\ x+y=0 \text{ 交 } A, D \end{cases}$

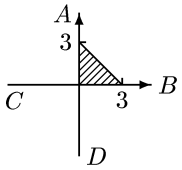
$\begin{cases} x+y=\pm 3 \\ x-2y=0 \text{ 交 } B, C \end{cases}$

$\Rightarrow 3\times 2 = 6$

$\Rightarrow ABCD$ 圍成的面積

(可以 AD, BC 爲新坐標軸)





習題 3. $\begin{matrix} y_1 = m_1x+b_1 \\ y_2 = m_2x+b_2 \end{matrix}$，證明 $\tan|\theta| = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$。

解：

$y_1 = m_1x+b_1 \quad y_2 = m_2x+b_2$，2 線的斜率爲 $m_1=\tan\theta_1$ $m_2=\tan\theta_2$

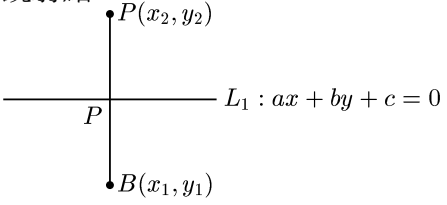
則 2 線夾角 $\theta = |\theta_1-\theta_2|$

$\Rightarrow \tan|\theta_1-\theta_2| = |\tan(\theta_1-\theta_2)| \quad \leftarrow if\ \theta < 90°$

$= \left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1+\tan_2}\right| = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

習題 4. 求 $A(x_0, y_0)$ 對於 $ax+by+c=0$ 的鏡射點

解：



$\because \vec{n} // (a\ ,\ b)$

$\overline{AP} = \dfrac{|\ ax_0 + by_0 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}|\ ax_0 + by_0 + c\ |\vec{n}$

$\begin{cases} if\ \ ax_0 + by_0 + c > 0 \quad \Rightarrow \vec{n} = \dfrac{(a\ ,\ b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ if\ \ ax_0 + by_0 + c < 0 \quad \Rightarrow \vec{n} = \dfrac{-(a\ ,\ b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 代入} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{PA} = \dfrac{(a\ ,\ b)(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$

$\therefore B = (x_1\ ,\ y_1) = (x_0\ ,\ y_0) - 2\overrightarrow{PA}$

$= (x_0 - 2a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\ ,\ y_0 - 2b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2})$

亦可用 $\overline{AB}$ 交 L_1 於 P 點，先得 P 坐標再用中點公式得 B