

2 月 21 號數學考試

題目 1. 假設地球是完美的球體，若甲乙兩人分別在高度 h 的大樓及平地上看日落，乙看見日落後馬上以行動電話告訴甲，而甲等他在日落後 t 秒才看見日落，求地球半徑。

$$\text{解} \therefore \cos \theta_1 = \frac{R}{R+h_1} = \frac{1}{1+\frac{h_1}{R}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{R}{R+h_2} = \frac{1}{1+\frac{h_2}{R}}$$

$$\therefore \theta_1, \theta_2 \ll 1 \quad \frac{h_1}{R} \quad \frac{h_2}{R} \ll 1$$

$$\therefore \text{可用泰勒展開} \begin{cases} \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{1}{1+\frac{h}{R}} = 1 - \frac{h}{R} \end{cases} \text{ 代入左右}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{\theta_1^2}{2} = 1 - \frac{h_1}{R} & \Rightarrow \theta_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \\ 1 - \frac{\theta_2^2}{2} = 1 - \frac{h_2}{R} & \Rightarrow \theta_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{R}} \end{cases}$$

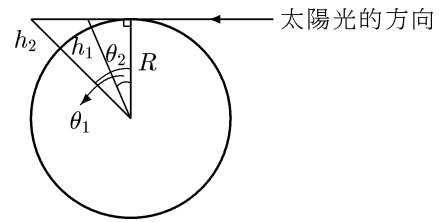
$$\text{又地球自轉七秒轉了 } \theta_2 - \theta_1 = 2\pi \times \frac{t}{86400}$$

$$\therefore \frac{2\pi t}{86400} = \frac{1}{\sqrt{R}} (\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1})$$

$$\sqrt{R} = \frac{86400}{2\pi t} (\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1})$$

$$\text{if } h_1 = 1.0m \quad h_2 = 1.7m \quad R = 6000km = 6 \times 10^6 m \text{ 代入}$$

$$t \approx 2.41 \text{ sec}$$



題目 2. 已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$, 某人在銀行存入二十年期
年利率 5% 的定存，問二十年後，本利和是本金的幾倍？(取二位有效數字)

$$\text{解： } (1.05)^{20} = y$$

$$\begin{aligned}\therefore \log y &= 20 \cdot \log \frac{105}{100} \\ &= 20 \cdot [\log 105 - \log 100] \\ &= 20 \cdot [\log 7 + \log 3 + \log 5 - 2] \\ &= 20 \times 0.021 = 0.42 \\ \therefore y &= 10^{0.42} \text{ 倍約 } (2.63)\end{aligned}$$