國立臺灣大學110學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (110插班生)

一、選擇填充題：（每題8分）

1. 在複數平面上，非為零的兩個複數 z_1 及 z_2，都在以對應於 i 的點爲圓心半徑為 1 的圓上，設若 $\overline{z}_1 \cdot z_2$的實數部份為零，且 $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{6}$，則 z_2 = ________。

2. 整係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$，且 $f(\sqrt{41} - 5) = f(1 + i) = 0$，則滿足 $f(x) < 0$ 的整數解有 ________ 個。

3. 設 m, n 為正整數, $i = \sqrt{-1}$，若 $N = (m + ni)^3 - 107i$ 也是正整數，則 N 之值為 ________ 。

4. 已知 a 是方程式 $x^2 - x - 2000 = 0$ 的一個正根， 則代數式 $3 + \dfrac{2000}{1 + \frac{2000}{1+\frac{2000}{a}}}$ 的值為 ________。

5. 設 n 為正整數，且正整數 a_n, b_n 滿足 $a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$，則點 (a_n, b_n) 可證明都在同一雙曲線上，此雙曲線的方程式為 ________ 。

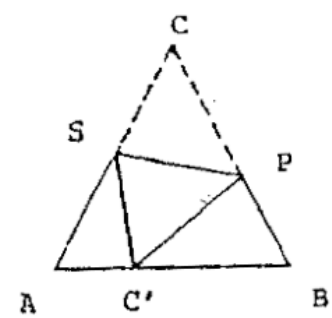
6. 設 x, y, z 為大於 1 的實數，而且 w 是一個正數。如果 $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ 和 $\log_{xyz} w = 12$，求 $\log_z w$ 之值 = ________。

7. 拋物線 $y = -\dfrac{x^2}{2}$ 與過點 $M(0, -1)$ 的直線 L 相交於 A, B 兩點。已知 O 為原點，若直線 OA 與直線 OB 的斜率之和為 1，則直線 L 的方程式為 ________。

8. 已知 $\tan\alpha+\tan\beta=25$ 且 $\cot\alpha+\cot\beta=30$，則 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值 = ________。

9. 若 $x_1, x_2\cdots, x_{40}$ 等 40 個數的值皆為 $x^3-6x^2+8x=0$ 的三個根之一，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{40}=26$，$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_{40}-1)^2=48$，則這 40 個數字裡面有多少個是 2？________。

10. 如圖，正三角形 ΔABC 經折疊使得頂點 C 置於 $\overline{AB}$ 上（即 C'），設 $\overline{AC'}=1$, $\overline{BC'}=2$，則折疊線段 $\overline{PS}$ 之長為 ________ 。



二、計算申論題：（一題20分）

11. 設數列 $<a_n>$ 的前 n 項和 $S_n=na+n(n-1)b$，其中 $n=1,2,\ldots$， a,b 是常數且 $b\neq 0$。

(A) 證明：$<a_n>$ 是等差數列；

(B) 證明：以 $\left(a_n, \dfrac{S_n}{n}-1\right)$ 為坐標的點 $P_n\,(n=1,2,\ldots)$ 都落在同一條直線上，並寫出此直線方程式。