

國立臺灣大學 109 學年度高中物理科學人才培育計畫
數學科試題 (109 插班生)

一、填充題：（每題10分）

1. 若方程式 $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = a + 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有兩個不同的實數解 x ，則參數 a 的取值範圍是 _____。
2. 計算 $10 \times \cot(\cot^{-1} 3 + \cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 13 + \cot^{-1} 21)$ 值 = _____。
3. 設 $x, y, z, w \in \mathbf{R}$ ，當 $n = 2, 4, 6, 8$ 時， $\frac{x^2}{n^2 - 1^2} + \frac{y^2}{n^2 - 3^2} + \frac{z^2}{n^2 - 5^2} + \frac{w^2}{n^2 - 7^2} = 1$ 成立，求 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ 之值為何？ _____。
4. 若多項 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{15} + x^{16} - x^{17}$ 能寫成 $y = x + 1$ 的多項式，試求 y^2 項的係數 = _____。
5. 已知 $0 < x < \pi$ ，求 $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ 的最小值 = _____。
6. 在三角形 ABC 中，過 A 點做垂直 BC 的垂線，垂足將 BC 分成兩段，長度分別為 3 與 17，已知 $\tan A = 22/7$ ，求三角形 ABC 的面積 = _____。
7. 已知 $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$ ，試求 $(\log_2 x)^2$ 之值 = _____。

8. 設 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 為 xy 平面上的兩點，若 $P(x, y)$ 為直線 AB 上任一點，則 $9^x + 3^y + 1$ 之最小值為 _____。

二、證明申論題：（一題20分）

1. 直線 $Ax + By + C = 0$ (其中 $A \cdot B \cdot C \neq 0$) 與橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相交於 P, Q 兩點， O 為坐標原點，且 $\overline{OP} \perp \overline{OQ}$ ，求證：

$$\frac{a^2 b^2}{C^2} = \frac{a^2 + b^2}{A^2 + B^2}.$$