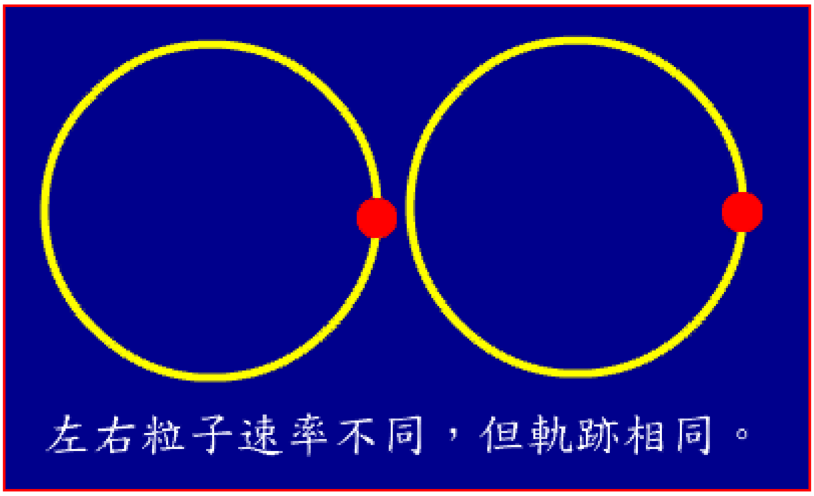
2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 7 曲線運動

問題：當粒子畫出曲線軌跡時，你如何去描述它在任一瞬間之曲率半徑？

想法：粒子可以在相同的曲線軌跡上進行不同速度的運動 (請點取下圖來觀看動畫)。

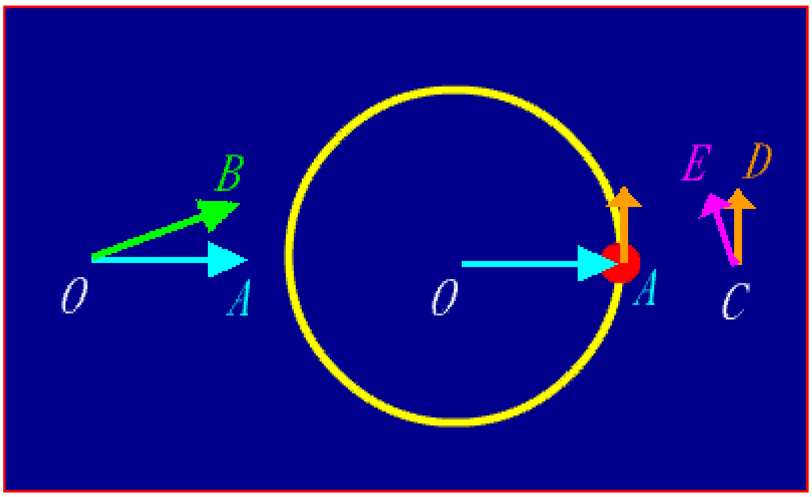


由於曲率半徑的概念顯然只和軌跡的形狀有關，我們大可選取一種比較簡單的運動方式來看這個問題。最簡單的做法是：於給定粒子之瞬間速度 $\vec{v}(t)$ 後，私下考慮另外一個參考粒子，而其瞬間速度則是

$$\hat{v}(t) \equiv \frac{\vec{v}(t)}{\left\|\vec{v}(t)\right\|}$$

(這個粒子因而是以單位速率在運動)

這樣做的好處是 (請點取右圖來觀看動畫)：你如果讓這個以單位速率在運動的粒子走很小的一段時間，則它的速度向量可以看成是自 $\overrightarrow{CD}$ 改變成 $\overrightarrow{CE}$，而粒子的位置向量(以軌跡曲率



的圓心 O 當作座標原點)則由 $\overrightarrow{OA}$ 改變成 $\overrightarrow{OB}$ ；而且很明顯的是 $\angle BOA = \angle ECD$ 。這表示以下的比例關係會成立：

$$\frac{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{ED}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{r} = \frac{\left\|\Delta \hat{v}\right\|}{\left\|\hat{v}\right\|} = \left\|\Delta \hat{v}\right\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\left\|\Delta \hat{v}\right\|}{\Delta s}$$

在上式中，$\Delta s = ds$ 是粒子於這段時間中所劃過的小小軌跡長度；而 r 便是我們當初所想計算的曲率半徑。於是我們就有了以下這個用來計算曲率半徑的公式

$$\boxed{\frac{d\hat{v}}{ds} = -\frac{\hat{r}}{r}}$$

其中 $-\hat{r}$ 是一個指向圓心所在的位置之單位向量，因爲 $d\hat{v} = \overrightarrow{DE}$ 顯然是和 $\hat{v} = \overrightarrow{CD}$ 互相垂直的！因此，圓心所在的位置顯然是

$$\boxed{\text{圓心位置} = \text{粒子位置} - r\hat{r}}$$

例子：

平面上的一個粒子之位置以下列方式隨時間改變：

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$$

這條軌跡是一條拋物線。請找出在 $t = 0.5$ 時粒子軌跡處之曲率半徑，並請據此算出此時的軌跡中心。(註：這題的計算有點繁！)

解：

先算速度

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=(1,2t)$$
$$\Rightarrow \left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{1+4t^2}$$
$$\Rightarrow \hat{v}(t)\equiv\frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{(1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}},\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

所以

$$-\frac{\hat{r}}{r}=\frac{d\hat{v}}{ds}=\frac{d\hat{v}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d\hat{v}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\hat{v}}{dt}\cdot\frac{1}{\left\|\vec{v}\right\|}$$
$$=\left(-\frac{4t}{(1+4t^2)^2},\frac{2}{(1+4t^2)^2}\right)\Bigg|_{t=0.5}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

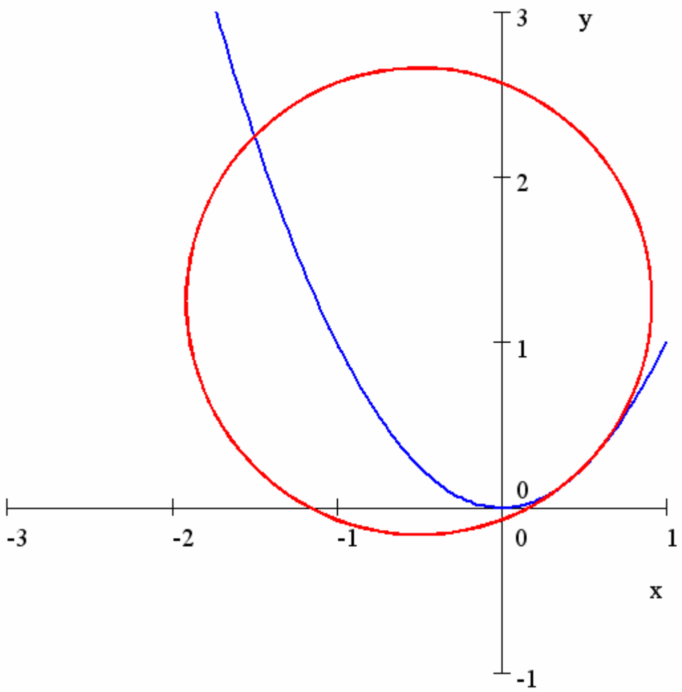
因此，

$$\frac{1}{r}=\sqrt{(-1/2)^2+(1/2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

我們還可以進一步算出來此時的軌跡中心是位於

$$-\hat{r}r+(0.5,0.5^2)=(-1,1)+(0.5,0.25)=(-0.5,1.25)$$

我們把算出來的這些結果顯示在下圖中。(藍色是粒子的拋物線軌跡，紅色是計算曲率半徑時得出來的圓形)



以上的計算也使得我們能進一步將正在做曲線運動的粒子所受到的加速度做一些有趣的分解：

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\|\vec{v}\|\hat{v})}{dt} = \hat{v}\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} + \|\vec{v}\|\frac{d\hat{v}}{dt} \\
&= \hat{v}\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} + \|\vec{v}\|\frac{d\hat{v}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \hat{v}\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} + \|\vec{v}\|^2\frac{d\hat{v}}{ds} \\
&= \underbrace{\hat{v}\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}}_{\text{和速度平行}} + \underbrace{\|\vec{v}\|^2\left(-\frac{\hat{r}}{r}\right)}_{\text{和速度垂直}}
\end{aligned}
$$

注意：

1. 和速度平行的部分(第一項)是用來改變粒子速率的，因爲它的大小剛好是 $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$。

2. 而 和$\vec{v}$垂直的第二項 則是用來改變粒子速度的方向；這個加速度的大小是 $\frac{\|\vec{v}\|^2}{r}$，我們傳統上把它叫做向心加速度。換句話說，如果一個粒子在轉彎，其轉彎時的曲率半徑是 r，那麼它在轉彎的方向上(此方向一定和瞬間速度垂直！)一定受到一個大小是 $\frac{\|\vec{v}\|^2}{r}$ 的向心加速度。

例子：(等速圓周運動)

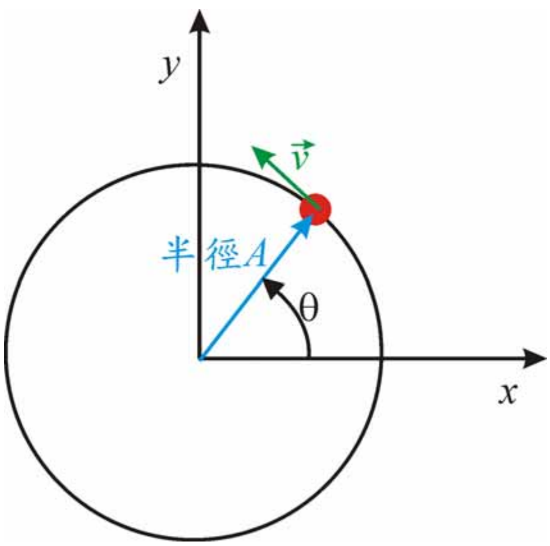
平面上的一個粒子之位置以下列方式隨時間改變：(參見附圖)

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = A(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$A = \text{常數}$$

$$\theta = \omega t$$

其中 ω 也是個常數，叫做角速度。請求出粒子的向心加速度。



解：

先算速度

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(-A\omega\sin\omega t,A\omega\cos\omega t)$$

所以

$$\|v\|=\sqrt{(-A\omega\sin\omega t)^2+(A\omega\cos\omega t)^2}=A\omega$$

向心加速度是

$$-\frac{v^2}{A}(\cos\omega t,\sin\omega t)=-A\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)=-\omega^2\vec{r}$$

這個加速度的數值是個常數 $A\omega^2$，而且和 $\vec{r}$ 的方向相反。

(Exercise!)

一個粒子在三度空間中走出以下的螺旋線軌跡:

$$\vec{r}=(x,y,z)=(\cos t,\sin t,bt)$$

其中 b 是個正的常數。請找出在 $t=0$ 時粒子軌跡處之曲率半徑，並請據此算出此時的軌跡中心。請分別討論 $b\to 0$ 及 $b\to\infty$ 之極限情況。