2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 6

本次演講是個高等課題，它會讓你們驚嘆力學理論的美妙！

回顧：

哈米頓原理：(Hamilton's principle)

給定一段固定的時間 T，同時也把起始以及最後的狀態都固定住。則一個日常力學系統中的各個粒子會自動選擇自己的軌跡，使得

$$\int_0^T \{(\text{總動能})-(\text{總位能})\}dt$$

成爲一個極值！

換言之，你如果把真實軌跡做一些微小的改變而得到一些「測試軌跡」，則沿著「測試軌跡」所算出來的積分值和沿著真實軌跡所算出來的積分值是一樣的。

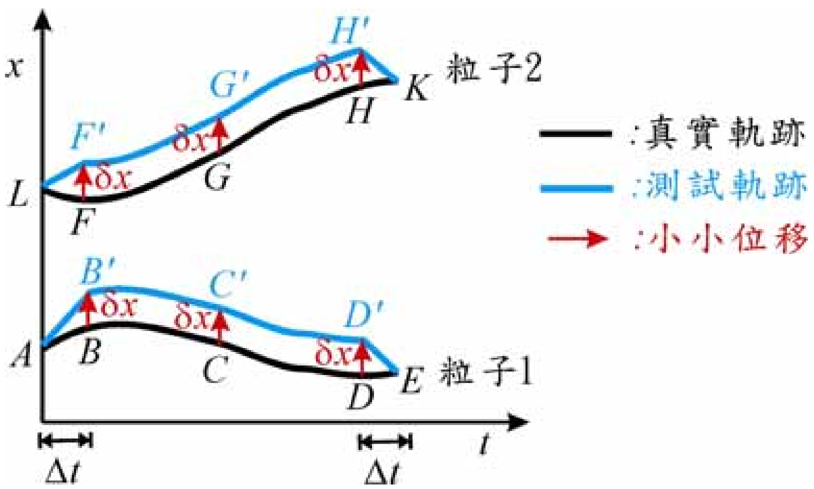
以下是哈米頓原理的一點應用。

例：

在一度空間中有兩個粒子在交互作用，它們之間的交互作用位能V 只和它們間的相對位置有關：$V = V(x_1 - x_2)$。請利用這個系統所具有在空間中的平移對稱性來證明系統的總動量是守恆的。

解：

把時間T 分成很多小段Δt ：$T = N\Delta t$。在右圖中我們以黑色曲線畫出粒子真實的軌跡 $ABCDE$ 及 $LFGHK$ 隨時間t改變的情形。



現在我們考慮兩條粒子的「測試軌跡」*AB'C'D'E* 及 *LF'G'H'K*。(真實的粒子當然**不是**走這些軌跡！) 這兩條軌跡是把 *BCD* 段在空間中整個平移 δx 成爲 *B'C'D'*，同時也把 *FGH* 段在空間中整個平移 δx 成爲 *F'G'H'*而得。

在哈米頓原理中我們必須考慮以下的積分：

$$\int_0^T \left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - V(x_1 - x_2) \right\} dt$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1^{(j)}}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2^{(j)}}{dt}\right)^2 - V(x_1^{(j)} - x_2^{(j)}) \right\} \Delta t$$

根據該原理，沿著「測試軌跡」所算出來的積分值和沿著真實軌跡所算出來的積分值必須是一樣的。 然而很明顯的是：在真實軌跡(x_1, x_2)上的位能值$V(x_1 - x_2)$和「測試軌跡」對應位置(x_1', x_2')上的位能值$V(x_1' - x_2')$都是一樣的——這是因爲這個系統具有在空間上的平移對稱性之故——所以我們便發現：只需考慮以下的積分便可：

$$\int_0^T \left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 \right\} dt$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1^{(j)}}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2^{(j)}}{dt}\right)^2 \right\} \Delta t$$

但是我們製作出來的測試軌跡還有另外一個特性就是：沿著 *B'C'D'*段上之測試粒子速度與在 *BCD* 段上之粒子原始速度根本是一樣的；同理，沿著 *F'G'H'*段上之測試粒子速度與在 *FGH* 段上之粒子原始速度也是一樣的。(這是因爲大家都平移了 δx 距離之故。) 因此，哈米頓原理就告訴了我們：

$$\left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\Bigg|_{AB} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\Bigg|_{LF} + \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\Bigg|_{DE} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\Bigg|_{HK} \right\} \Delta t$$

$$= \left\{ \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\Bigg|_{AB'} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\Bigg|_{LF'} + \frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\Bigg|_{D'E} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\Bigg|_{H'K} \right\} \Delta t$$

接著注意到：

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{AB'}=\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{AB}+\frac{\delta x}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{D'E}=\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{DE}-\frac{\delta x}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{LF'}=\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{LF}+\frac{\delta x}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{H'K}=\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{HK}-\frac{\delta x}{\Delta t}$$

把這些全部代入上式，同時只保留到δx的一次方項(因爲δx很小之故)，於是我們就得到

$$\left\{m_1\left.\left(\frac{dx_1}{dt}\right)\right|_{AB}+m_2\left.\left(\frac{dx_2}{dt}\right)\right|_{LF}\right\}=\left\{m_1\left.\left(\frac{dx_1}{dt}\right)\right|_{DE}+m_2\left.\left(\frac{dx_2}{dt}\right)\right|_{HK}\right\}$$

這道式子不偏不倚正是動量守恆定律！

例：

一個質量是一個單位的粒子在一度空間中受到彈簧的回復力在做運動。已知彈簧的彈性位能是

$$V(x)=\frac{x^2}{2}$$

若粒子一開始的時候是位於原點，且希望它在時間$t=2$的時候恰好跑到$x=2$之位置。那麼請利用哈米頓原理近似地算出粒子於任一時刻t之位置。$(0\le t\le 2)$

解：

如果我們根據牛頓運動定律來處理這個問題，則所列出之方程式就應該是

$$\text{加速度}=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=-\frac{\frac{dV}{dx}}{1}=-x$$

$$\text{速度}=v=\frac{dx}{dt}$$

(請注意第一道式子告訴我們粒子受到的力量遵守虎克定律。) 不過我們到目前爲止所學到的微積分知識仍不足以應付這兩道聯立方程式。唉！ 所以我們才要退而求其次，利用哈米頓原理來近似地算出粒子於任一時刻t之位置！

我們的猜測是：

$$x(t) \approx t + at(2-t)$$

(注意到這個猜測確實滿足我們要求的條件：粒子一開始的時候是位於原點，且它在時間 $t=2$ 的時候恰好跑到 $x=2$ 之位置。) 其中 a 是個未定的係數。現在把 $x(t)$ 代入哈米頓原理的積分式中：

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \right\} dt \\
&= \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}(1+2a-2at)^2 - \frac{1}{2}(t+at(2-t))^2 \right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left\{ -a^2t^4 + 2a(1+2a)t^3 - (4a+1)t^2 - 4a(1+2a)t + (1+2a)^2 \right\} dt \\
&= \frac{4a^2}{5} - \frac{4a}{3} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

哈米頓原理說我們一定要讓這個積分值取極(小)值才會越接近真實的軌跡，所以我們可以從

$$\frac{d}{da}\left(\frac{4a^2}{5} - \frac{4a}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

求出來 $a = \dfrac{5}{6}$。所以

$$x(t) \approx t + \frac{5}{6}t(2-t) = \frac{8}{3}t - \frac{5}{6}t^2$$

就是一個近似解。事實上，這題的答案是

$$x(t) = \frac{2\sin t}{\sin 2} \approx 2.2\sin t$$

右方這個圖把這兩個答案畫在一起供你比較。(黑色線是精確解，藍色線是近似解) 你大概會很驚訝說我們這麼粗糙的近似竟然和真實的答案如此接近吧！