2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 5

以下要討論做功的概念，但先來點預備知識。

內積：兩個向量$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$及$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$之內積定義爲

$$\vec{u}\cdot\vec{v}\equiv u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

註：

這樣定義出來的內積是個純量，它和你是用什麼座標系來看這些向量無關！原因是

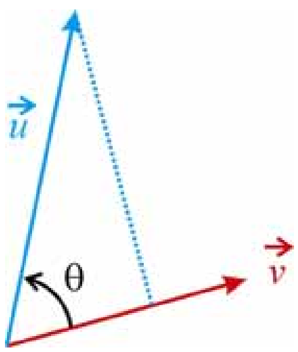
$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2+(u_3+v_3)^2$$
$$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2$$
$$\Rightarrow\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=4(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_2\cdot v_2)=4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

而左手邊只牽涉到向量的長度，當然是個純量了。

既然內積是個和所選座標系無關的純量，我們便可以選擇一個最方便的座標系來研究內積的意義。如果我們把向量$\vec{v}$的方向選成是x軸，則$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1$，於是我們就看出來它根本就是向量$\vec{u}$在向量$\vec{v}$上面的投影罷了。當然啦，你也可以把它看成是向量$\vec{v}$在向量$\vec{u}$上面的投影。所以我們可以用更幾何的方式去描述它：

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\theta$$

如下圖所示。



問題：當你對一個粒子施加一個作用力一會兒，則它會增加多少動能呢？答案是

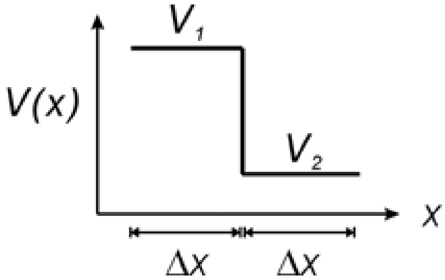
$$d(\frac{m\vec{v}^2}{2}) = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot d\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot d\vec{x}$$

所以我們若定義粒子在走了 $d\vec{x}$ 之小小位移量時，作用力 $\vec{F}$ 對它做的功是 $\vec{F}\cdot d\vec{x}$，那麼做功的量就相當於是動能的改變量。而且，動能的改變量大小是和施力所走的位移有關，而不是當初想像的和時間有關。

註：
如果我們對一個粒子施力的方向永遠垂直於粒子的運動速度之方向，那麼我們就無法對它做功或增加它的動能。此時我們所施的力量只是用來改變它運動的方向。

接著要來談一個比較高等的課題。

假設一個粒子在如圖中的位能場中運動。則我們知道粒子在這兩段區域中所花的時間 Δt_1 及 Δt_2 雖然並不相同，但是它們一定滿足：



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2$$
$$\Rightarrow \frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t_1)^2} + V_1 = \frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t_2)^2} + V_2$$

但是以上的式子可以改寫成

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t_1}\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_1} - V_1\Delta t_1\right) - \frac{\partial}{\partial \Delta t_2}\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_2} - V_1\Delta t_2\right) = 0$$

所以如果我們令總時間 $T = \Delta t_1 + \Delta t_2$ 爲一個固定的數，而把 $\Delta t_2 = T - \Delta t_1$ 視爲 Δt_1 之函數，則以上的公式就化成

$$\frac{d}{d\Delta t_1}\left\{\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_1} - V_1\Delta t_1\right) + \left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_2} - V_1\Delta t_2\right)\right\} = 0$$

但是我們從微積分的理論知道一個函數 $f(x)$ 如果在 x_0 的位置處滿足 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$，則表示該函數在 $x = x_0$ 處是取極值；這就表示粒子在這兩段區間

中運動時，竟然會自動調整其速度快慢，使得

$$\left\{\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_1}-V_1\Delta t_1\right)+\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_2}-V_1\Delta t_2\right)\right\}$$

是取極值！

這個驚人的結果可以改寫成

$$\left\{\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t_1)^2}-V_1\right)\Delta t_1+\left(\frac{m}{2}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t_2)^2}-V_2\right)\Delta t_2\right\}$$
$$=\int_0^T\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-V(x)\right\}dt$$

是取極值。

更一般來說，我們有以下的重要結論：

哈米頓原理：(Hamilton’ s principle)

給定一段固定的時間 T，同時也把起始以及最後的狀態都固定住。則一個日常力學系統中的各個粒子會自動選擇自己的軌跡，使得

$$\int_0^T\{(\text{總動能})\text{-}(\text{總位能})\}dt$$

成爲一個極值！

換言之，你如果把真實軌跡做一些微小的改變而得到一些「測試軌跡」，則沿著「測試軌跡」所算出來的積分值和沿著真實軌跡所算出來的積分值是一樣的。

註：

1. 我們可以根據這個原理來推導出牛頓第二運動定律，所以它們彼此是等價的。當然，這也表示在相對論中我們必須把以上的形式稍作修正才可使用。
2. 我們可以利用這個原理以及物理系統所具有的對稱性來推導出一些守恆定律來！例如，若系統具有在空間中的平移對稱性，則我們便能證明系統的總動量是守恆的！
3. 我們可以利用這個原理來找出一個力學系統的比較好的近似解。
4. 對於未知的交互作用，此原理的適當推廣可使我們猜測出該交互作用可能具有的形式。