2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 4

問題：作用力須具備什麼樣的形式才能使能量是守恆的呢？

推理：

如果能量是守恆的，即

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv'^2 + V(x')$$

則

$$\frac{m}{2}(v'-v)\cdot(v'+v) = -(V(x')-V(x))$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\frac{(v'-v)}{\Delta t}(v'+v) = -\frac{V(x')-V(x)}{\Delta t} = -\frac{V(x')-V(x)}{x'-x}\cdot\frac{(x'-x)}{\Delta t}$$

於是在取了 $\Delta t \to 0$ 的極限後我們就得到

$$\frac{m}{2}\frac{dv}{dt}\cdot 2v = -\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx}\cdot v$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{dx}$$

所以根據牛頓第二運動定律，我們就發現作用力的形式一定要是能表示成

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

的形式才可使能量保持守恆！

例子：

在一度空間中正 x 軸位置處所受力之大小是

$$F = -\frac{A}{x^2}$$

(負號表示這是一個往原點吸引之力量)，則這是一個保守力場(即能量是守恆的)嗎？

答：

我們可以驗證當

$$V(x) = -\frac{A}{x}$$

時，作用力 F 真的可以寫成

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

之形式。原因是

$$-\frac{dV}{dx} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{A}{x+\Delta x} - \frac{A}{x}}{\Delta x}$$

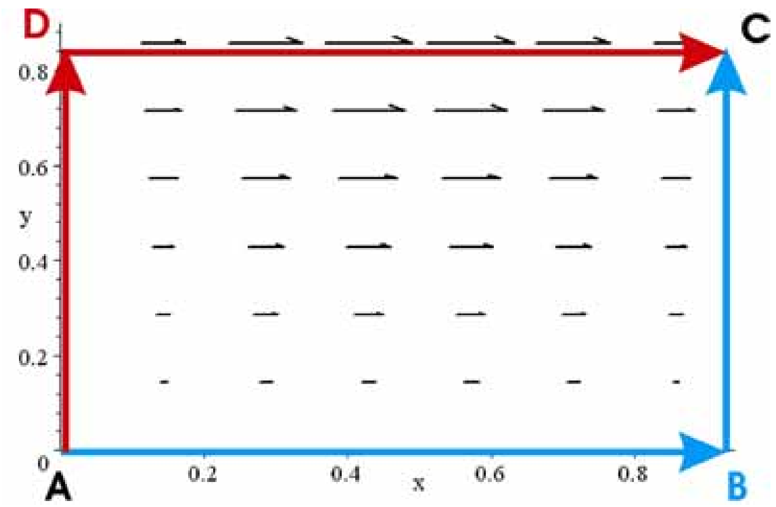
$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A}{x(x+\Delta x)} = -\frac{A}{x^2}$$

所以果然沒錯！

其實，在一度空間中的任何一個不隨時間改變的力場一定是個保守場，但是在更高維度的空間中通常就不然了。

例子：

一個平面上的力場如圖中所示，則它是一個保守場嗎？



答：

不可能。因爲如果我們走一段路徑自 $A \to B \to C$ ，則粒子在沿途中完全沒有受到力量；但是若走 $A \to D \to C$ ，則在 $D \to C$ 之路段中粒子會受到一個水平作用力之加速而增加動能。既然兩個路徑的起點和終點均相同，那麼獲得之位能就應該相同，如今走完紅色路徑後竟然比走藍色路徑還多獲得一些動能，這就表示總能量並不守恆。所以這不可能是個保守場。

註：
最有趣的是：雖然從數學的觀點來說，你用手隨便造出來的高度空間中的力場通常一定是非保守力場，但目前已知的四種基本交互作用力(重力、電磁力、強交互作用與弱交互作用)卻都是保守力場！這對於物理系統的研究造成莫大的助益！

註：
當我們把以上的概念推廣到三度空間時，一個保守力場的 x 、 y 及 z 方向之作用力大小和位能之間的關係可以推廣寫成是

$$F_x = -\frac{dV(x,y,z)}{dx}$$
$$F_y = -\frac{dV(x,y,z)}{dy}$$
$$F_z = -\frac{dV(x,y,z)}{dz}$$

不過傳統上我們寧可用另外一種符號來代表上式中的微分部份。例如

$$\frac{dV(x,y,z)}{dx} \to \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}$$

這樣做的目的只是想強調在以上的微分運算中我們是偷偷地將 y 及 z 視爲常數。這類的微分運算也有一個專有名詞，叫做偏微分。