2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 3

反作用定律的推論：

$$
\begin{aligned}
&F_{1\to 2} = F_{2\to 1} \\
&\Rightarrow m_1 a_1 = -m_2 a_2 \\
&\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0
\end{aligned}
$$

但是我們知道

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{v_1(t+\Delta t) - v_1(t)}{\Delta t} \\
a_2 &= \frac{v_2(t+\Delta t) - v_2(t)}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

所以

$$\frac{\left[m_1 v_1(t+\Delta t) + m_2 v_2(t+\Delta t)\right] - \left[m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)\right]}{\Delta t} = 0$$

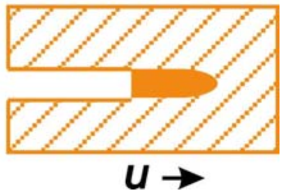
這表示這一瞬間的 $m_1 v_1 + m_2 v_2$ 的值和下一瞬間的數值根本是一樣的！所以我們說 $m_1 v_1 + m_2 v_2$ 是個守恆量。

定義：粒子的 $m\vec{v}$ 叫做它的動量。

守恆律的好處多多！它讓我們在不需要追究交互作用細節的情況下仍能得到一些有用的資訊！

例子：

質量 m 的子彈以速度 v 打入一個質量是 M 的靜止木塊內並卡在其中。假設木塊屑沒有散落出來，請問木塊(含子彈)後來的速度爲何？



答：

子彈打入木塊內是一個很複雜的交互作用，但我們不需要去理會它也仍然能算出答案來！令木塊(含子彈)後來的速度爲 u ，則

$$mv + M\cdot 0 = (m+M)u$$

$$\Rightarrow u = \frac{mv}{m+M}$$

其實物理上還有另外一個很重要的守恆律！

例子：

在地球表面附近，物質粒子都有一個往下受加速的趨勢。實驗顯示：此加速度之大小竟然對所有測試粒子都一樣！我們把它叫重力加速度，其數値並以 g 代表。試求出一個垂直拋射出去的粒子在任一瞬間之高度。

答：

我們曾解過等加速度的問題：若加速度爲 a ，則

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\Rightarrow r(t) = r(0) + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

此處我們若選定往上的方向是正向，則 $a = -g$ ，於是套公式可得任一瞬間的速度及所在的高度是

$$v = v_0 - gt$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

不過這一題的目的不是在套公式，而是要看出以下一件重要的事：

$$\frac{v(t)^2}{2} = \frac{(v_0 - gt)^2}{2} = \frac{v_0{}^2 - 2v_0 gt + g^2t^2}{2}$$

$$= \frac{v_0{}^2}{2} - g\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$= \frac{v_0{}^2}{2} - g(z - z_0)$$

所以移項以後我們就得到

$$\frac{v(t)^2}{2} + gz(t) = \frac{v_0{}^2}{2} + gz_0 = \text{常數}$$

因此，我們有了另外一個新的守恆律！

定義：

$$\frac{mv^2}{2}\text{叫動能}$$
$$mgz\text{叫重力位能}$$

註：

以上所做的推導若用大家剛學到的微積分符號來表達，其實會更簡潔。你唯一須注意到的是以下的對應：

$$\Delta t \leftrightarrow dt$$
$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \leftrightarrow v = \frac{dr}{dt}$$
$$r(t) - r(0) = v(t)\Delta t + v(t-\Delta t)\Delta t + \cdots + v(\Delta t)\Delta t$$
$$= \sum v(t_j)\Delta t \leftrightarrow \int v(t)dt$$

例子：

$$F_{1\to 2} = F_{2\to 1}$$
$$\Rightarrow m_1 a_1 = -m_2 a_2$$
$$\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

但是

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt}$$
$$a_2 = \frac{dv_2}{dt}$$

所以

$$m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{dt} = 0$$

最後這道式子就代表了 $m_1 v_1 + m_2 v_2$ 不隨時間而改變，因此就是個守恆量。

例子：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt} = -g \\
&\Rightarrow v\frac{dv}{dt} + gv = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} + g\frac{dz}{dt} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2 + gz\right)}{dt} = 0
\end{aligned}
$$

最後這道式子就代表了$\frac{1}{2}v^2 + gz$不隨時間而改變，因此就是個守恆量。