

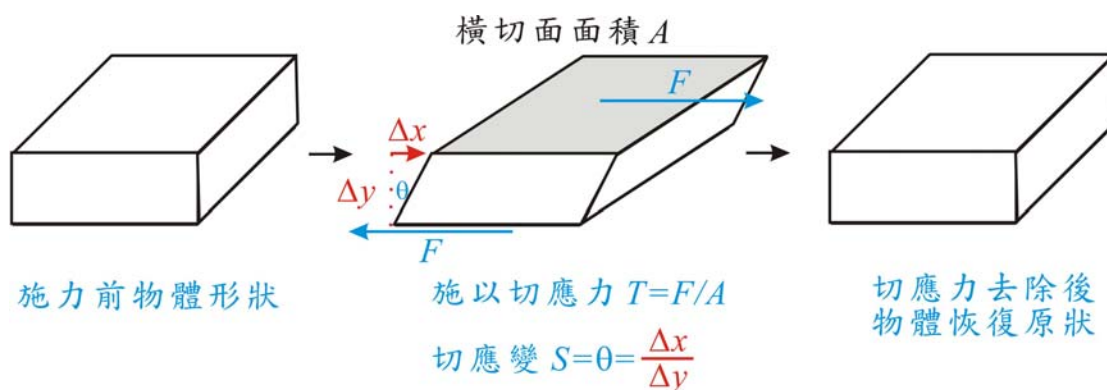
2003-2004 年高一力學課程大要

陳義裕

Lectures 13-14 流體物理

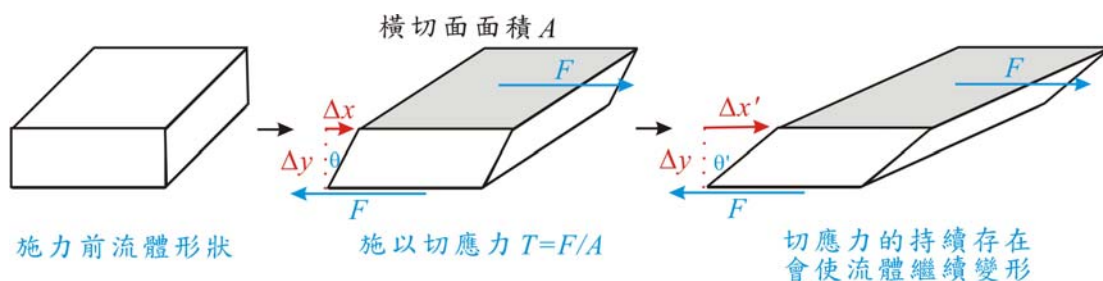
流體的定義：無法承受切應力(或稱剪應力)的物質。

一般彈性物體：



通常切應力 $T = F/A$ 會和切應變 $S = \theta = \Delta x / \Delta y$ 成正比，這也是一種虎克定律。

一般流體：



通常切應力 $T = F/A$ 會和切應變 $S = \theta = \Delta x / \Delta y$ 隨時間的變率成正比，亦即

$$T = \eta \frac{d\Delta x}{dt} = \eta \frac{v_x(\Delta y) - v_x(0)}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

其中 v_x 是流體在切方向之速度，而比例常數 η 則稱為「黏滯係數」。我們把滿足這道式子的流體叫做牛頓式流體。日常生活中見到的流體多半可視為是一種牛頓式流體；但若流體內含有一些比較特殊的蛋白質，那就不一定了，像血液就不是很理想的牛頓式流體。

註：

一個物體究竟是不是流體，其實是和它產生永久形變的反應時間尺度有關。所以流體的定義有時並沒有那麼明確。不過部份書上所指稱的「某些歐洲老教堂的窗玻璃呈現上薄下厚的現象表示玻璃在數百年的長時間尺度下會被重力往下拉而展現出流體的特性」，這個說法則並不正確。因為窗玻璃的上薄下厚其實是當時吹玻璃的技術所致；而且某些科學家也估算過它展現出流動特性的時間尺度，結果發現這根本遠超過千、萬年。

兩個流體靜力學的基本原理：

1. 帕司卡原理：

假設流體是靜止且不可以壓縮，則在流體內任一點所施加的多餘壓力一定會完全傳到流體的每一個地方。

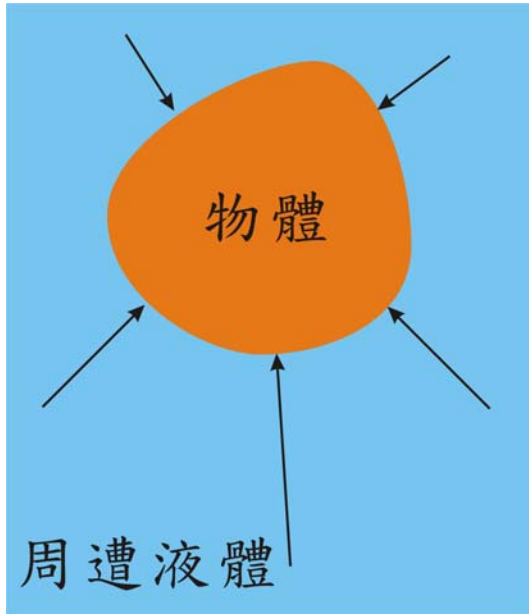
(這個原理我們在初中已經學過，許多液壓裝置都是利用這個原理而設計出來的，此處我們就領略而不談了。)

2. 阿基米德原理：

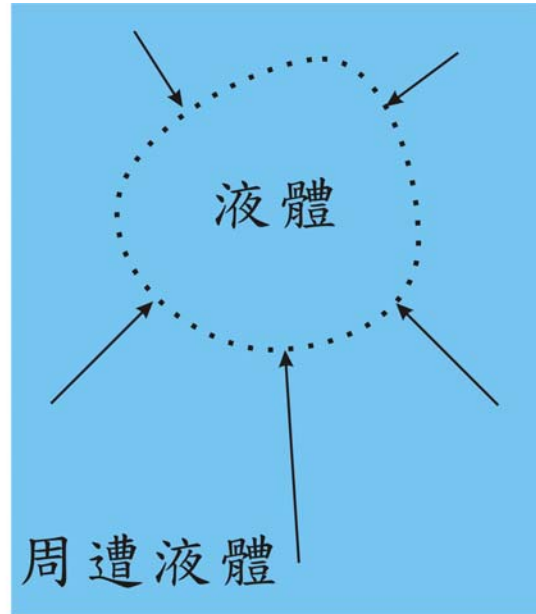
假設流體是靜止的，則一個完全被流體所包圍的物體之「視重量」會變輕，變輕的重量剛好等於該物體所排開的流體的重量。通常我們會把這個減輕的重量叫做液體施於物體上的浮力。不過我們必須要特別注意的是：如果液體是在流動的話，那麼這個原理就不見得適用了。

證明：

在下面左圖中所顯示出來的是一個物體在靜止的液體中所受到的壓力分佈。如果把這個物體以相同的液體取代，就像下面右圖中所顯示的那樣，那麼被圈出來的液體所受到來自周遭的壓力分佈當然也是一樣的。可是被包圍出來的這個液體是和周遭的液體達到靜力平衡。所以周遭液體對它所施的壓力之淨力，一定和它自身的重量相抵消。換句話說，被圈出來的液體所受到的「浮力」就等於它本身的重量。既然如此，那左圖中那個物體所受到的來自周遭液體的「浮力」，當然也就等於它所排開的液體的重力。



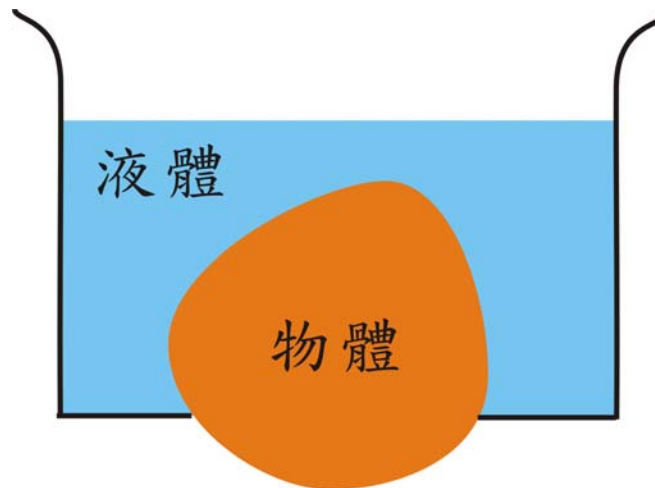
液壓對物體所施的淨力和右圖中虛線所包圍出之液體受到來自周遭液體之淨力是完全相同的



虛線所包圍出之液體和周遭液體達到靜力平衡

例子：

你認為下圖中的那個物體會像阿基米德原理所預測的那樣受到一個往上的浮力嗎？



接下來我們來談談流體動力學。在流體動力學中有一個很基本的數量，叫做雷諾數(Reynolds number) R 。假設有一個物體在流體裏面運動。則雷諾數是液體每單位體積所受到的慣性力量與它所受到的黏滯力的比值：

$$R = \frac{\rho L v}{\eta}$$

在以上的公式中， ρ 代表流體的密度， L 和 v 分別代表物體的特性長度以及它在流體中運動時的特性速度， η 則是前面已經定義過的黏滯係數。我們可以利用以下的方式來看出這個定義的來源：對於一個長度大略是 L 的流體小塊來說，

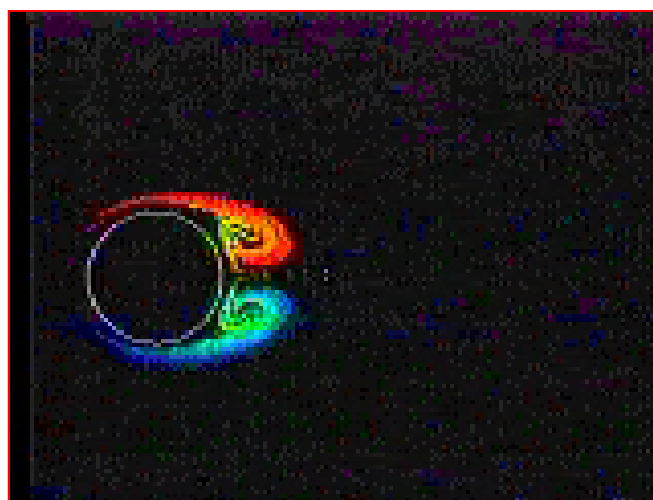
$$R \sim \frac{\text{慣性力}}{\text{黏滯力}} \sim \frac{\text{質量} \cdot \text{加速度}}{\text{面積} \cdot \text{黏滯切應力}} \sim \frac{(\rho L^3) \frac{dv}{dt}}{(L^2) \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

$$\sim \frac{\rho L^3 \frac{v}{T}}{L^2 \eta \frac{v}{L}} \sim \frac{\rho L^2}{\eta} \sim \frac{\rho L \frac{L}{T}}{\eta} \sim \frac{\rho L v}{\eta}$$

在上式中， T 是流體在流過物體表面時所經過的特性時間。

當雷諾數很高時就代表流體的黏滯性並不重要，而當雷諾數很低時，這代表物體所受到的黏滯力非常的大。但是雷諾數的重要性還不止於此。當重力效應可以省略時我們還會發現一個很重要的事實：幾何外觀上完全相似的兩個物體若是在相同雷諾數的流體中運動時，則流體的流動形式也會完全相似！換句話說，如果在其中一個系統的某個地方會出現一個漩渦，那麼另外那個系統的對應的地方也一定會出現一個相似的漩渦；而若其中一個系統出現了亂流，另外那個系統也一定會在對應的地方出現一個相似的亂流。我們之所以在設計飛機時可以利用風洞實驗來測出飛機飛行時候的特性，用的其實就是這個道理。

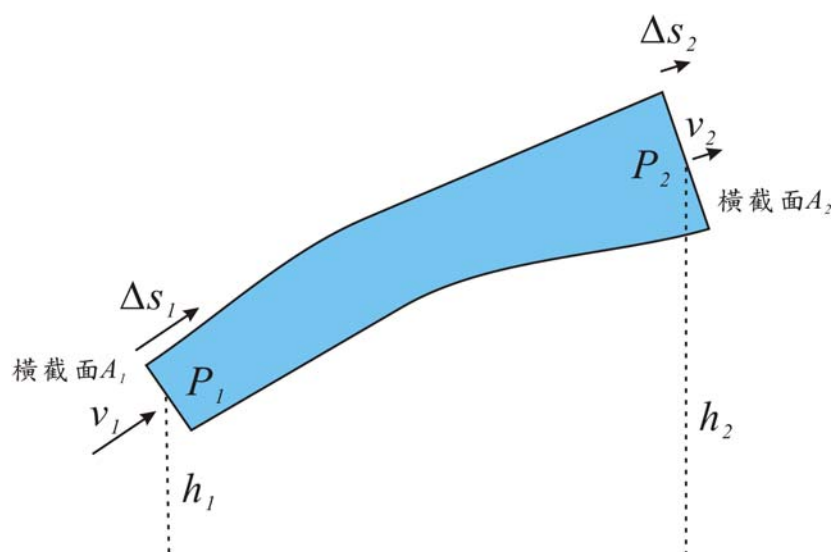
從以上的說明中，你或許也會想到流體的流動特性一定和雷諾數有關。沒有錯，而且我們會發現：當流體的雷諾數越高時(也就是說粘滯性越不重要時)，則流體的流動就越不穩定。下圖中的這個電影是一個電腦模擬動畫(請點取附圖來觀看影片)。



它所展現出來的是流體在流過一個圓柱體時所產生的渦流。這個渦流的形式和流體的速度有關；當流體的速度增加到某個大小之後，渦流還會週期性地「卸裝」，

然後隨著流體流走！這叫做卡曼渦漩(Karman vortices)。我們在討論「共振」現象時說過，曾有科學家證實風在吹拂過吊橋的時候會在橋的下風處週期性地產生氣流漩渦，並將美國華盛頓州塔寇瑪吊橋意外事件歸咎於這些氣流漩渦對吊橋所造成的週期性反作用力。那位科學家就是馮卡曼(von Karman)。雖然這個解釋並不全然正確，但是卡曼渦漩的現象在生活中經常發生卻是不爭的事實！

最後，我們要推導一個流體動力學中一個很有用的方程式：白努利方程式(Bernoulli equation)。簡單的說，這個方程式其實就是功與機械能的守恆定理罷了。它所適用的是一個不能壓縮且不具黏滯力的靜定流(steady flow，即流體的運動模式並不會隨時間而改變)。



假如我們讓圖中的流體在「流管」內流動一段很短的時間 Δt ，則在「流管」的另一端就會有一些液體被擠出來。根據功與機械能的守恆定理，我們知道壓力從管子左邊所作的功扣掉壓力從管子右邊所作的功就一定等於這整段流體所獲得的淨能量。於是我們有：

$$\begin{aligned}
 & P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\
 &= \rho A_2 \Delta s_2 \cdot \left(gh_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \rho A_1 \Delta s_1 \cdot \left(gh_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

但是因為流體是不可以壓縮的，所以從左端推進去的流體的體積 $A_1 \Delta s_1$ 必然等於從右端被推出來的流體的體積 $A_2 \Delta s_2$ 。所以我們就有

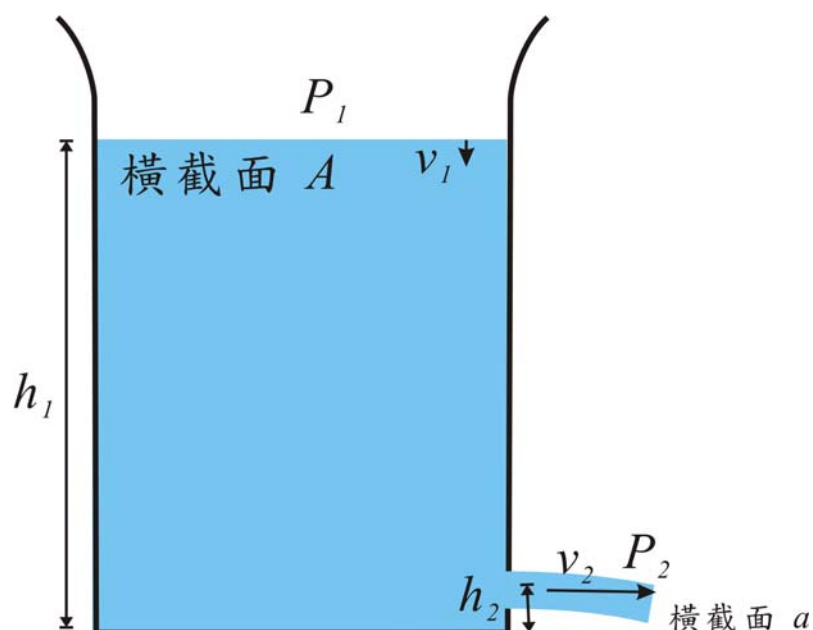
沿著流線上面運動的流體一定滿足

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

而這就是出名的白努利方程式。

例子：

在一個裝滿水的大水缸的側面開一個小孔，然後讓水噴射出來。請算出水噴射出來的速度。



解：

由於小孔的面積和大水缸的橫截面積比起來實在是太小了，所以當水噴射出來的時候，大水缸裏面的水位基本上是不會動的，所以我們可以把這個問題看成是一種靜定流來處理。於是白努利方程式就可以套用了。由於小孔以及水缸都是暴露在大氣壓力中，所以 $P_1 = P_2 =$ 大氣壓力。此外， $v_1 \approx 0$ 。於是我們就有

$$\rho gh_1 \approx \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

你或許會認為這個推導非常漂亮，但是我建議你回家自己做個實驗，看看這道公式到底管不管用。如果你還有興趣的話，也可以嚐試挖幾個大小不同的孔，比比看到底是孔還是小孔噴出來的水柱比較快。（結果可能會出乎你意料之外！）

白努利方程式也常常被用來解釋飛機為什麼能夠在空氣中飛行。簡單地說，飛機機翼的設計是使得流過飛機機翼下端的空氣速度 v'_2 比較慢，並使得流過飛機機翼上端的空氣速度 v_2 比較快，結果根據白努利方程式我們可以看出：

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$P_1' + \frac{\rho v_1'^2}{2} = P_2' + \frac{\rho v_2'^2}{2}$$

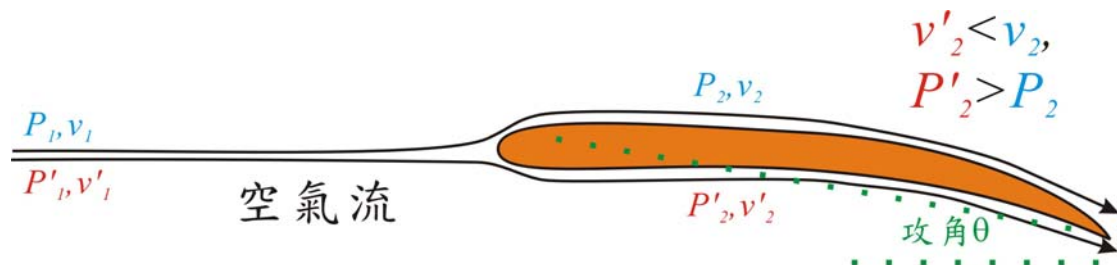
但是

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_1' + \frac{\rho v_1'^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = P_2' + \frac{\rho v_2'^2}{2}$$

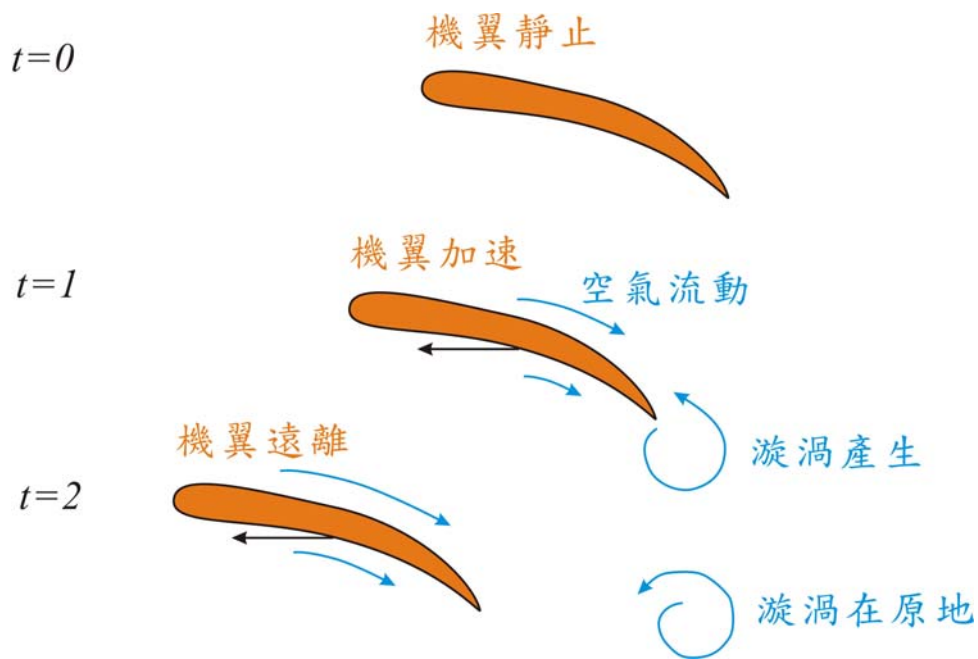
$$\because v_2' < v_2 \Rightarrow \therefore P_2' > P_2$$

既然機翼下端的壓力比較大，整架飛機當然就會受到一個往上的昇力，因此飛機就可以抗拒重力、浮在空中了。



機翼側視圖

可是為什麼流過飛機機翼下端的空氣速度會比較慢呢？其實這是和飛機機翼與水平線間的夾角有關(這個角度叫做攻角；angle of attack)。當攻角是正的時候，飛機就會受到一個往上的昇力；可是當攻角是負的時候，飛機就會受到一個往下壓的力量。而之所以會有這種差別，其實都是因為空氣是有黏滯性的，於是在機翼附近的空氣就會想緊貼著它不動；這就使得飛機在加速的過程中，機翼的上下端會產生漩渦，從而造成這種速度差別。以下就是一個示意圖。



你也可以拿一根湯匙來劃過平靜的水面上以便模擬以上的現象——結果你會看到湯匙後方會留下一個原地打轉的漩渦！（不過你必須在水面上灑上一些微小的飄浮物才能幫助你更容易地看出這個漩渦。）