2003-2004 年高一力學課程大要

陳義裕

Lectures 12 重疊原理、波動的透射與反射

有了波動方程式我們就可以更明確的說明到底什麼是重疊原理了。用數學的語言來說，如果 $f(x,t)$ 以及 $g(x,t)$ 都分別滿足波動方程式的話，那麼 $f(x,t)+g(x,t)$ 也一定滿足波動方程式。

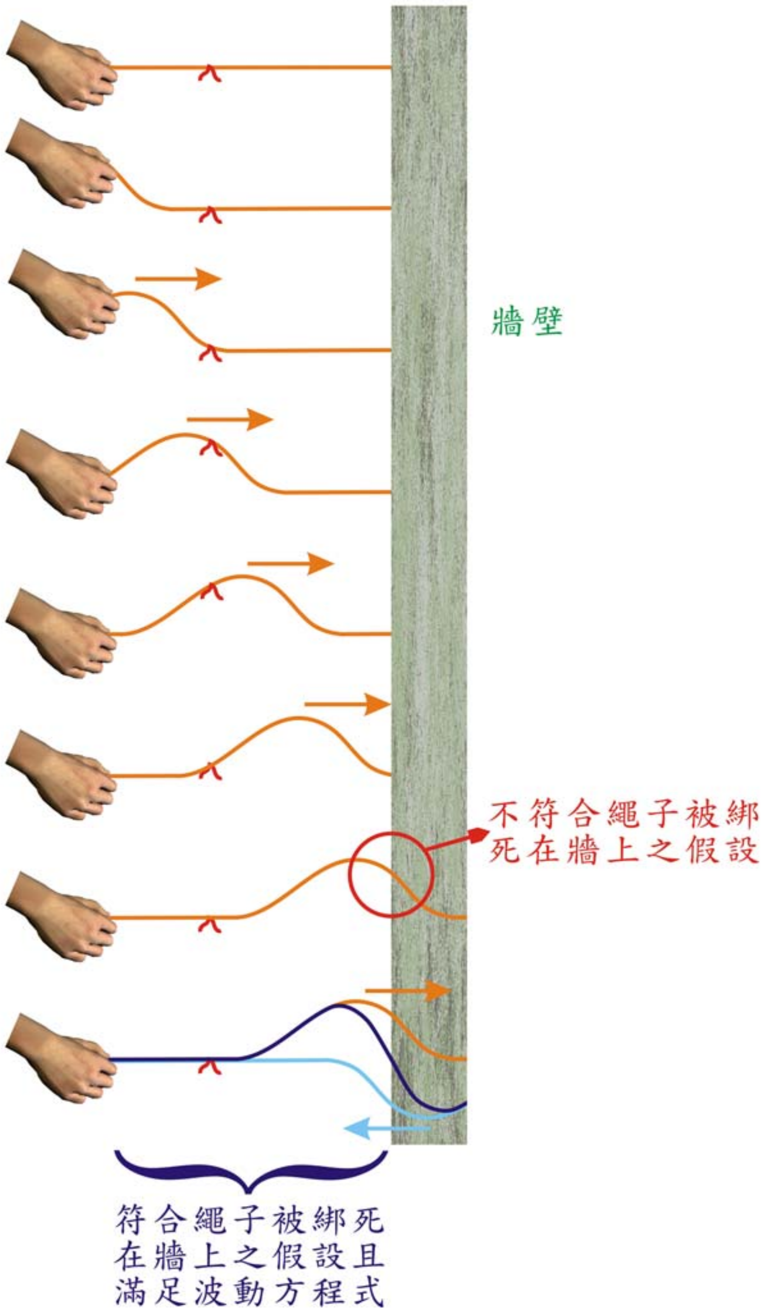
例子：(利用重疊原理來造出一個合乎物理條件的解)

假設一條繩子的右端被牢牢地綁在牆上，然後從繩子的左手端有一個繩波往右傳送過來，則該繩波在碰到了牆壁之後會怎麼樣呢？

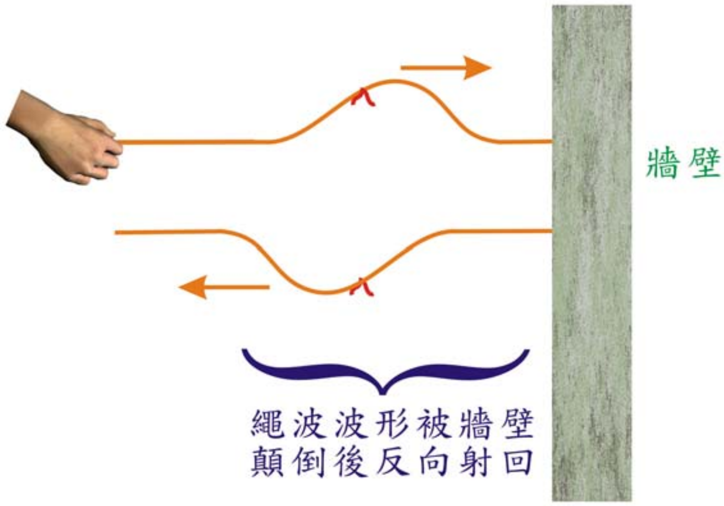
解：

參見下圖，當上下起伏的波(橘色波)碰到牆壁的時候，如果波還是繼續往前行、彷彿牆壁並不在那裏擋著路一樣，那麼我們絕對無法滿足繩子的右端其實是被牢牢地綁在牆上這個邊界條件。因此，繩波碰到牆壁的時候一定要變形。可是它會如何變形呢？

由於牆壁在繩波入射的任一瞬間都會對繩子施以一個垂直的力，以保持繩子的右端能始終被牢牢地綁在牆上，因此它也會在牆壁的左手側(即有繩子的那一側)造出一些波形出來。在下圖中我們是以淺藍色的波形來代表它。如果牆壁的效應是：對牆壁而言，造出的淺藍色波之波形與橘色波的波形在每一時刻都剛好顛倒的話(此時它的行進方向必然是和橘色波剛好相反)，那麼把淺藍色波與橘色波相加之後所獲得的新波形(深藍色波)必然滿足我們的邊界條件。而且因爲繩波滿足重疊原理，因此我們利用這種對稱方式所造出來的深藍色波一定也滿足波動方程式。既然深藍色波既滿足波動方程式，而且又滿足邊界條件，所以它就是真正的解！



結論： 射向牆壁的繩波整個波形會被完全顛倒後反向射回！(如下圖)



由於我們可以把牆壁視為一種質量密度是無限大的繩子，所以我們接下來就可以討論更一般的情況：

例子：(波從一條線密度是μ_1的繩子射向線密度是μ_2的繩子之透射及反射情形)

繩子交界處($x=0$)之條件是：

$$\begin{cases} \psi_1(x=0,t)=\psi_2(x=0,t) \\ T\left.\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = T\left.\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \end{cases}$$

其中$\psi_{1,2}$分別代表在左(右)手側繩子之位移量；第一式代表繩子接在一起沒有斷掉，第二式則代表繩子交界處左右兩側之垂直回復力互相抵消，這樣界面才不會有無窮大的加速度。

假設繩波自左方($x<0$)射向右方($x>0$)，則我們可以假設

$$\psi_1 = A\cos(k_1 x-\omega t)+B\cos(-k_1 x-\omega t)$$
$$\psi_2 = C\cos(k_2 x-\omega t)$$

其中A代表入射波之振幅，B代表反射波的幅度，C則是透射波之幅度。而且

$$\begin{cases} \dfrac{\omega}{k_1}=\sqrt{\dfrac{T}{\mu_1}} \\ \dfrac{\omega}{k_2}=\sqrt{\dfrac{T}{\mu_2}} \end{cases}$$

代入交界處($x=0$)之條件便得

$$\begin{cases} A+B=C \\ k_1(A-B)=k_2C \end{cases}$$

把 B 及 C 當成未知數，我們可以解出

$$\begin{cases} B=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A \\ C=\dfrac{2k_1}{k_1+k_2}A \end{cases}$$

上式有幾個值得注意之事項：

1. 在 $k_1<k_2$ 時(即 $\mu_1<\mu_2$)則 $B/A<0$！所以此時反射波之波形會顛倒。這是前面結果之推廣。
2. 在 $k_1=k_2$ 時(即 $\mu_1=\mu_2$)則 $B=0$！所以此時剛好沒有反射波。這時我們可以說繩子 1 及繩子 2 這兩種介質對於波的傳播特性「**匹配**」得很好，所以波可以很容易透射過去。

超音波之所以可以用來檢驗人體內部器官，基本上用的就是以上的道理：臟器在人體內形成一種對超音波「匹配」不好的介質，所以它會反射超音波讓儀器接收到，結果我們便可以偵測出它的外形以及進一步之性質。