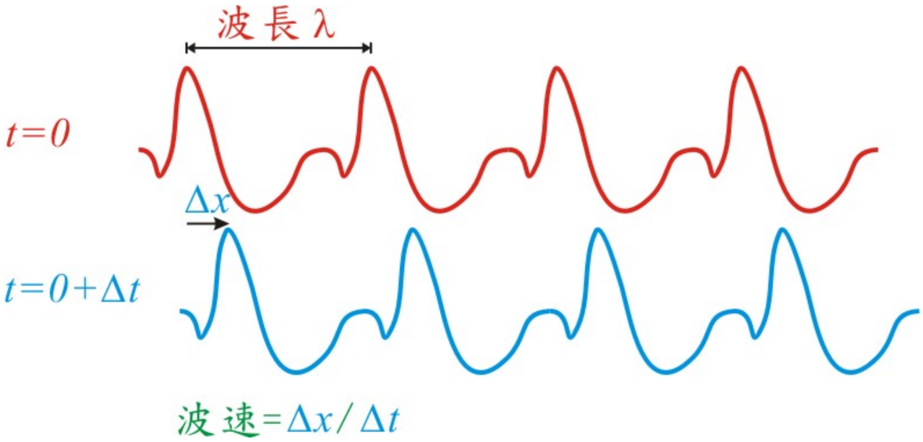
2003-2004 年高一力學課程大要

陳義裕

Lectures 10-11 波動

在空間中的一個波形可能會隨著時間而改變。最簡單的一個情況是，這個波形在空間中每隔一段距離就會重複一次，這樣的一段距離叫做波長 λ；而它隨著時間改變的方式則是，在經過一段時間 Δt 後它就會在空間中平移一段距離 Δx。我們把 $\Delta x / \Delta t$ 叫做波速。



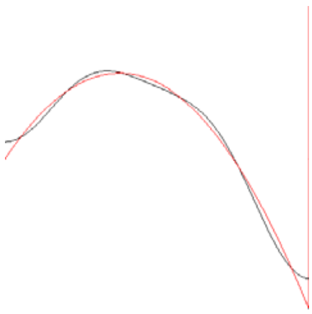
物理上在描述波動的時候，常常是以正弦(sine)或者是餘弦(cosine)函數來當成一個波形。可是如果你曾經用手去抖動一條繩子或者去撥動水面的話，你一定也會注意到這樣所造出來的波它的波形根本就不是正弦或餘弦。既然如此，我們爲什麼還要用這麼特殊的波形來討論波的運動呢？答案是：

1.數學家能夠證明：「任何」的形狀都可利用正弦函數或者是餘弦函數的適當組合來代表！這個理論叫做**傅立葉分析**(Fourier analysis)。

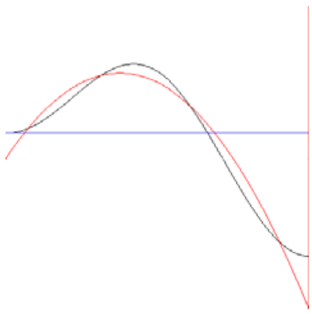
2.很多物理上有興趣的波動現象都滿足所謂的**重疊原理**，而這就表示：如果我們知道在一開始的那一瞬間的波形可以寫成許多正(餘)弦函數的組合，而且又知道這些個別的正(餘)弦函數波形隨著時間如何運動的話，那麼只要讓這些(正(餘)弦函數波形各自去獨立運動一段時間，所得到的合成波形一定就是下一瞬間你會觀察到的波形！

例子：(利用餘弦函數來逼近一個一般的函數)

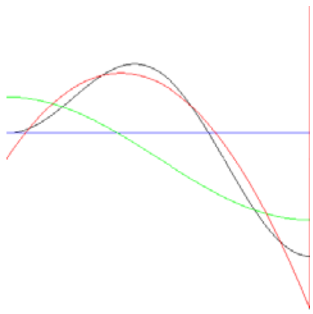
$$
\begin{aligned}
&3x-4x^2 \\
&\approx .1666+.4052\cos\pi x-.4052\cos 2\pi x \\
&+.045\cos 3\pi x-.1013\cos 4\pi x+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$



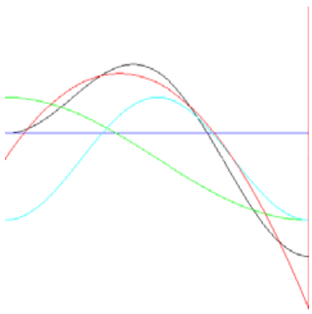
5 項逼近



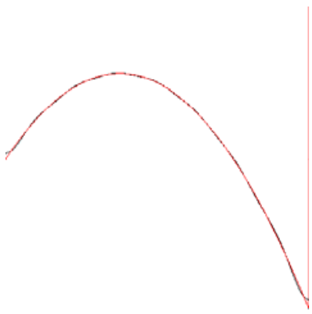
常數項



$\cos\pi x$ 項



$\cos 2\pi x$ 項



15 項逼近

從以上的圖中我們可以看到三角函數究竟是如何逼近一般的一個函數 $3x-4x^2$ (紅色曲線)：

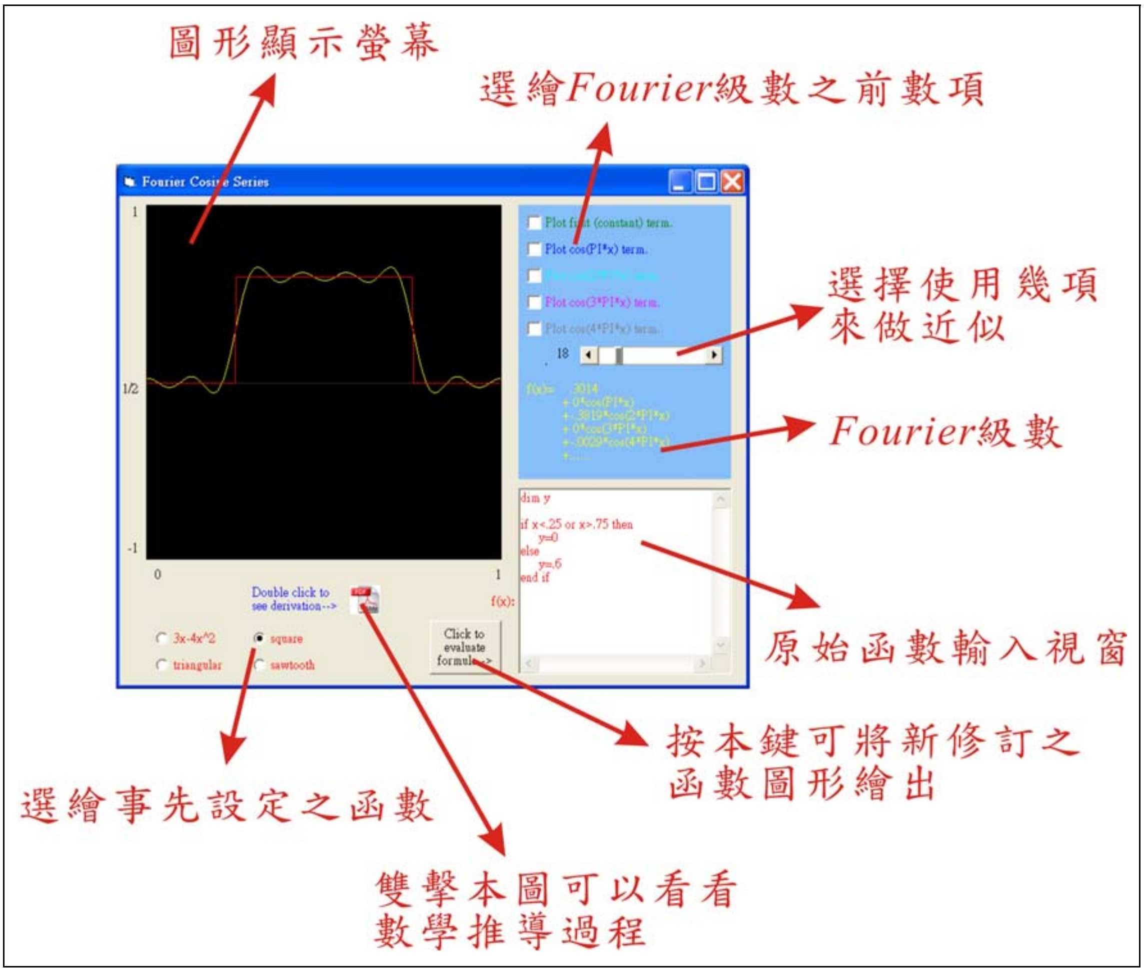
(a) 首先我們會有一個常數項(藍色直線)來代表函數的平均值。

(b) 接著用一個餘弦函數 $\cos\pi x$ 來代表曲線的大致走向(淺綠色曲線)。

(c) 下一項的餘弦函數 $\cos 2\pi x$ 則會對我們的近似作進一步的修正(靛色曲線)。

(d) 如果我們用 15 項餘弦函數來逼近原始的函數，結果效果就非常的好了(黑色曲線)！

如果你對於傅立葉分析很有興趣，那麼你可以下載 FourierCosineAnalysis.zip 這個檔案，把它解壓縮，然後執行 setup.exe 去安裝一個傅立葉分析的應用程式 FourierCosineAnalysis.exe。下面方格中所顯示出來的是你在啓動執行這個檔案以後所會見到的畫面，以及一些小小的說明。希望你會喜歡這個程式。



空間中的一個波形 $f(x)$ 隨著時間的演進可能會以固定的一個速度 v 往右方傳播。那麼在某一個時間 t 的時候，空間中的波形就會變成 $f(x-vt)$。特殊的說，如果 $f(x)=A\cos kx$，那麼在時間 t 的時候空間中的波形就會變成 $A\cos k(x-vt)$。但是習慣上我們會把這個表示式改寫成

$$A\cos(kx-\omega t)\text{，}$$

$$v\equiv\frac{\omega}{k}$$

同時做以下的定義：

$$A=\text{振幅}$$

$$\omega=\text{角頻率}$$

$$k=\text{波數或波向量}$$

我們可以很容易地看的出來，波數指的是每一單位距離中究竟包含了幾個完整的波形(但是是以相角 2π 做一個完整的單位)，而角頻率指的是在每單位時間中波上下振盪的次數(但是也是以相角 2π 做一個完整的單位)。因此，

$$\text{波速}=(\text{波長}\lambda)\cdot(\text{頻率}\nu)$$
$$=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot(2\pi\nu)=\frac{1}{k}\cdot\omega=\frac{\omega}{k}$$

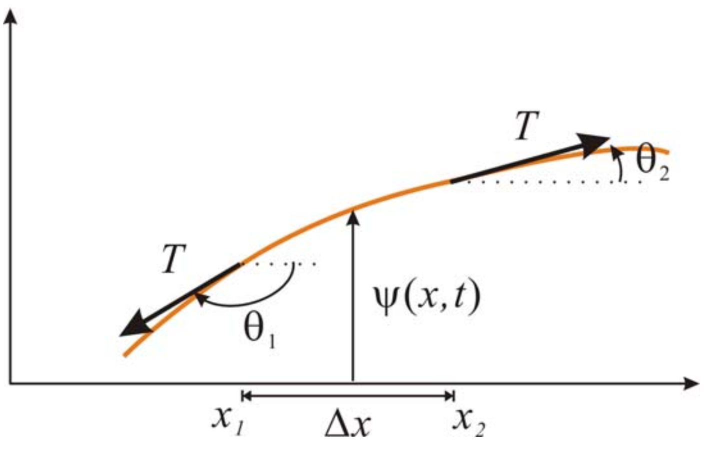
這個結果當然是和前面的敘述相符合的。

更一般來說，一個在三度空間中傳播的(餘弦函數)平面波形可以用以下的方式去描述它：

$$A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

這個時候，波向量$\vec{k}$所指的方向就是波所傳播的方向。要看出這一點很簡單：只要把坐標系的x-軸取在$\vec{k}$的方向，則上式就變成了$A\cos(kx-\omega t)$，而既然這道式子和空間的其他軸y及z沒有關係，顯然它所代表的就是一個平面波沿著正x軸的方向在傳播了。

接下來我們討論波動產生的機制。我們以一條張得很緊的繩子作例子。假設繩子上面的張力是T，繩子每一單位長度上面的質量是μ，同時假設繩子在橫方向有一個小小的位移$\psi(x,t)$。現在考慮長度爲Δx的一小段繩子。



牛頓的第二運動定律$F=ma$若以繩子上面的變數來表示則變成了

$$ma=F$$
$$\Rightarrow \mu\Delta x\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=T\sin\theta_2+T\sin\theta_1$$

假設繩子整個的擺動幅度不大，而且波形很平緩，那麼我們就可以把$\sin\theta$函數改用$\tan\theta$函數去取代。這樣做的好處是我們可以把上式中右手側的所有變量都改用橫向位移ψ的函數來代表：

$$
\begin{aligned}
&\mu\Delta x\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=T\sin\theta_2+T\sin\theta_1\\
&\approx T\tan\theta_2+T\tan\theta_1\\
&=T\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_2}-T\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_1}\\
&=T\left(\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_2}-\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_1}\right)\approx T\Delta x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&\Rightarrow\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

我們最後得到的這個公式叫做波動方程式。說穿了，波動方程式其實也不過就是把牛頓的運動方程式改用波動的變數來代表罷了。

這一道方程式之所以會被叫做波動方程式，其實是因爲它裏面確實包含有會在空間與時間中傳播的波動解。事實上我們可以很容易驗証出來「任何」一個函數 $f(x-vt)$ 都可以是以上方程式的解呢！以下就是一個很簡單的驗証：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t}=-vf\,'(x-vt)\\
&\Rightarrow\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial t^2}=v^2 f\,''(x-vt)\\
&\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x}=f\,'(x-vt)\\
&\Rightarrow\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial x^2}=f\,''(x-vt)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial x^2}\\
&\Rightarrow v^2 f\,''(x-vt)=\frac{T}{\mu}f\,''(x-vt)\\
&\Rightarrow v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}
\end{aligned}
$$

所以我們竟然推導出了波形在繩子上面傳播的速度，而且這個結果竟然和這個波到底是長什麼形狀或具有什麼波長都沒有關係！

其實對於一般的機械波來說我們都有

$$
波速=\sqrt{\frac{彈性}{慣性}}
$$

只不過有些時候波形傳播的速度會和波到底是長什麼形狀很有關係。通常這種事情之所以會發生，多半是因爲物質的彈性可能和波長以及那種波動究竟是以物質的何種彈性特質作爲它的回復力有關係。舉個例子來說，地殼發生地震的時候會產生好幾種不同形式的地震波，其中有橫波、有縱波，也有沿著地表傳播的表面波。由於這些不同的波動都有它們各自獨特的性質，而它傳播的速度又和它所經過區域的彈性以及慣性很有關係，所以科學家可以根據在不同的觀測站觀測到的地震數據來倒推出地球內部的結構呢！