

2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 9 共振

問題：

當質量為 m 的粒子在一度空間中受到虎克定律 $F = -kx$ 的支配而運動時，我們就有一個自然角頻率是 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 的簡諧振子。如果我們以週期性的驅動力 $mA \cos \omega t$ 作用在這個簡諧振子上(這類的運動叫做「強迫振動」)，則它的運動會是什麼樣子呢？

答：

我們可以利用牛頓第二運動定律把運動方程式寫成：

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F = -kx + mA \cos \omega t \\ \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} x + A \cos \omega t \equiv -\omega_0^2 x + A \cos \omega t \end{aligned}$$

我們可以很容易驗證

$$x = \left\{ \frac{A}{-\omega^2 + \omega_0^2} \cos \omega t \right\} + \{ B \cos(\omega_0 t + \theta_0) \}$$

是以上方程式的一個解。其中 B 及 θ_0 是兩個常數，它們的取值必須由振子起始的位置與速度來決定。通常我們會把注意力集中在第一組括號 $\{\dots\}$ ，並刻意忽略掉第二組括號 $\{\dots\}$ 內的項，原因是當這個振子受有一個微小的運動阻力時，我們會發現第二組括號 $\{\dots\}$ 內的項會隨時間很快地衰減掉。所以只要稍微等上一段時間後，第二組括號 $\{\dots\}$ 內的項就等於是沒貢獻了。也就是因為這個緣故，我們在這裡就逕行把本問題的解當作是

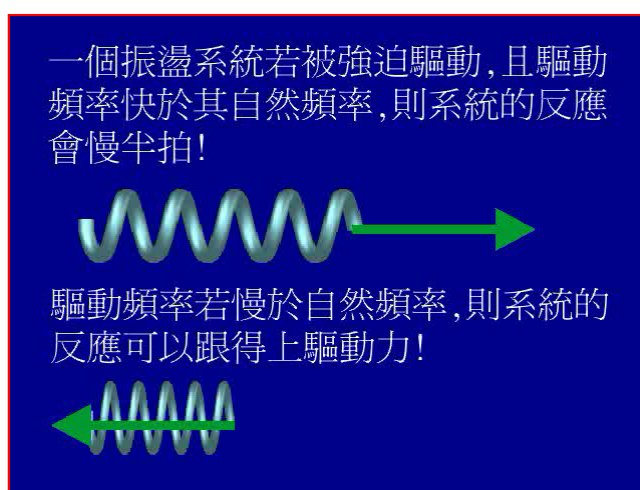
$$x(t) = \frac{A}{-\omega^2 + \omega_0^2} \cos \omega t$$

從這道式子我們立刻注意到在 $\omega \rightarrow \omega_0$ 的時候 $x(t)$ 會爆掉！用口語來說，當外加驅動力的頻率接近振子的自然頻率時，振子的反應會變得很劇烈，因為它的振幅會變得很大。我們把這個現象叫做**共振**。

爲什麼當外加頻率與系統的自然頻率相同時整個振動的幅度就會增大而更容易被我們偵測、感受到呢？道理其實很容易理解：既然它們的週期是一樣的，則當系統正好盪到最大幅度時，外界施加的作用力也剛好達到最大值，所以外界施加的力量便可「錦上添花」，讓振盪「更上一層樓」而增強幅度！

在討論共振現象時我們還會注意到另外一個有趣的現象：當 $\omega < \omega_0$ 時， $x(t)$ 和外界的驅動力 $mA \cos \omega t$ 是「同相」(在本例中它們是同號)；但是當 $\omega > \omega_0$ 時， $x(t)$ 和外界的驅動力卻是「反相」的(在本例中它們是異號)。用口語來說，一個振盪系統若被強迫驅動，且驅動頻率快於其自然頻率，則系統的反應會「慢半拍」；但若驅動頻率是慢於自然頻率，則系統的反應可以跟得上驅動力，所以兩者的步調會是一致的！

我們把這個結果以動畫的方式表現在右圖中。(請點取右圖來觀看動畫) 在此動畫中，箭頭是外界施力的方向。厚重的大彈簧(上方之彈簧)自然頻率比較小，所以驅動頻率快於自然頻率的結果是系統的反應會「慢半拍」。下方之彈簧則剛好相反。



我們前面曾說過，如果我們有 N 個簡諧振子互相交互作用，那麼整個系統就會有 N 個自然頻率。那如果我們現在以某個特定的角頻率去驅動這個系統，而且系統又剛好有這樣一個自然頻率值，那結果會如何呢？答案是：自然頻率剛好是這個數值的振動模式會蕩得特別劇烈(因爲共振)，而別的振動模式則不會有很大的反應。這也就是說，頻率剛好吻合的振動模式會自動地「鶴立雞群」，使得我們可以很容易看到該種振動。

這個結果很妙，因爲我們便可據此來量度一個系統究竟有哪些自然頻率：你所需做的事情不過是調整外加驅動力的頻率，看看系統對它有沒有強烈反應。有的話就代表你調的數值確實是個自然頻率；而若系統表現出一副「道不同，不相爲謀」的冷淡反應，那就表示你用的不是個自然頻率。由於了解系統的自然頻率的分布可以幫助我們分析物體內部的結構特性，所以這個共振現象的應用是很重要的。

共振的另外一種應用則是剛好顛倒過來：系統現在只有一種特定的自然頻率，但

是你卻送進一大堆具有各種不同頻率的驅動力去和它交互作用。此時系統又會如何反應呢？答案很簡單：系統只會挑那個和自己的自然頻率相同的外加驅動力來反應，對於其他頻率的驅動力則「視若無睹」！

這類共振現象最常見的一個應用就是收音機：不同電台都會把自己所播放的廣播節目訊號「搭載」於一個事先指定好頻率的電磁波上面，例如台北市的教育廣播電台頻率是 101.7 MHz (每一家電台的頻率都不相同)。因此，我們的大氣中其實是充滿了這些電磁波「噪音」的。當你將收音機調到某一個電台 (例如台北市的教育廣播電台) 時，其實你只是調整了收音機內部電路的特性，使得它的自然頻率剛好變成 101.7 MHz。於是你的收音機就會因為共振的關係，從充滿了不同頻率電磁波的大氣中去對 101.7 MHz 的驅動力去做強烈反應。這時候就代表你的收音機已接收到該台的訊號。

你可能聽過吉他等樂器會有一個音箱以便使聲音可以放大。(音箱當然也有改變音色的作用，不過這不是我們現在想討論的重點。) 我們也可以利用音樂盒來做個簡單的實驗，以便體會一下類似的效果。(請點取附圖來觀看影片)



從影片中你應會注意到：每當布丁杯或透明的音樂盒蓋與底座接觸時，音樂盒的樂音會變得特別大聲。這是因為布丁杯以及透明音樂盒蓋的自然頻率與底座音樂造成的振動形成共振之故。可是為什麼當布丁杯一離開音樂盒底座後聲音就明顯變小——畢竟底座的振動還是可以透過空氣而傳到布丁杯，所以共振應該還是可以發生才對，不是嗎？此中玄機在於：若想要把一個振動很有效地從一個介質傳到另一個介質時，則此兩介質的某些特性一定要能匹配得很好才可以。例如若兩介質的彈性很接近時，則只有當它們的密度也很接近時才能使振動很有效地從第一個介質傳到第二個介質，否則振動波會在介面處大量反射、傳不過去。由於空氣和音樂盒或布丁杯之間的匹配性並不好，所以透過空氣去讓音樂盒底座與

布丁杯產生共振是不容易的事。

你可能產生的另外一個疑問是：既然把布丁杯拿來和音樂盒底座接觸時會有將聲音放大的效果，這代表每單位時間中被傳播出來的聲波能量增大了；但是音樂盒內儲存的能量根本就是當初我們上發條時所提供的彈性能，這個能量應該是固定的，則多出來的能量是從哪裡來的呢？答案是：總能量其實是沒有增加的，所以我們應該換另一種觀點來看這個問題——既然加了布丁杯後消耗能量比較兇，而最後釋放出來的總能量必須維持相同，唯一的可能性便是這些音樂不可能持久。舉個實際的數字來說：把音樂盒上緊發條後，整段樂曲在不加布丁杯時可以重複演奏 11 次，但以布丁杯碰觸底座後樂曲只可以重複演奏 8 次——雖然樂音是變大聲了。

近幾年還有一個和共振有點關係的新興名詞——隨機共振(stochastic resonance)。就某個意義來說，這指的是系統原來擁有一些未能被我們偵測出來的微弱結構，但在經過噪訊的「污染」後反而變得很容易被觀察到。

共振當然也有造成災害的可能性。一個經常被舉出來的著名例子就是 1940 年發生在美國華盛頓州塔寇瑪吊橋(Tacoma Narrows Bridge)的意外事件(請[點取附圖](#)來觀看影片)。



有些科學家相信，意外之所以會發生，其實是因為風在吹拂過吊橋的時候會在橋的下風處週期性地產生氣流漩渦。這些氣流漩渦對吊橋就會造成一個週期性的作用力。很不幸的是，由於該吊橋的某個自然頻率剛好和這個空氣動力學效應的頻率相同，所以共振很容易發生。事件發生的當天吹過橋上的風比平常強得多，結果共振就使得吊橋盪得太厲害，最後便導致橋的斷裂。不過工程師在仔細研究之後，認為以上的解釋只適用於吊橋平日的上下起伏(請按[次頁上圖](#)觀賞動畫)；至於使橋振到斷裂的機制則和共振完全不同(是吊橋本身的另外一種不穩定性振動所導致；請按[次頁下圖](#)觀賞動畫)。

