

2006-2007 年度高中資優營數學期末模擬試題

1. 試簡化 (一)  $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta$  , (二)  $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$  , (三)

$$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} .$$

2. 試以角度相加之三角公式證明  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  。
3. 設若  $f(x) = x \sin(x^2)$  , 試求  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  。
4. 設若  $y^2 + y = \sin x^2$  , 求  $y$  對  $x$  微分之導函數  $\frac{dy}{dx}$  , 並以  $x$  及  $y$  表示之。
5. 設若  $\vec{i}$  、  $\vec{j}$  及  $\vec{k}$  分別為  $x$  、  $y$  及  $z$  軸方向上的單位向量, 且  $\vec{A} = (1, 2, 1) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  ,  $\vec{B} = (2, -1, 0) = 2\vec{i} - \vec{j}$  , 求此兩向量之夾角。
6. 設若矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  , 求其反矩陣  $A^{-1}$  。
7. 求行列式  $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  之值。
8. 求積分  $\int x \sin(x^2 - 1) dx$  之結果。
9. 求定積分  $\int_{-2}^3 |x| dx$  及  $\int_{-2}^2 x^3 dx$  之值。
10. 設若  $x^2 - xy - y^2 = 1$  , 求  $y$  對  $x$  微分之一階及二階導函數  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  , 並以  $x$  及  $y$  表示之。
11. 試以部份積分法計算  $\int x^3 e^{2x} dx$  。
12. 設若  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$  , 求微分導函數  $f'(x)$  。

2006-2007 年度高中資優營數學期末模擬試題

13. 設若設若  $\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y$  及  $\vec{e}_z$  分別為  $x$ 、 $y$  及  $z$  軸方向上的單位向量，且向量

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z, \quad \vec{B} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z \quad \text{及} \quad \vec{C} = c_1\vec{e}_x + c_2\vec{e}_y + c_3\vec{e}_z, \quad \text{試證}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{及} \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

14. 設若  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  及  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求  $A+B$ 、 $AB$  及  $BA$ ，並檢驗  $AB$

是否等於  $BA$ 。

15. 聯立方程式  $2x-5y=-2$  與  $-x+3y=4$  可改寫為  $AX=B$ ，其中  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad \text{試證 } A \text{ 的反矩陣為 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{並求解 } x \text{ 與 } y.$$

16. 試求之部份分數展開式：即求  $\frac{2x^2+3x+1}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{a_0}{(x-1)^2} + \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{b_0}{(x-3)}$  中之展開係數

$a_0$ 、 $a_1$  及  $b_0$ 。

附加幾個有用資訊：

(i) 矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  之行列式為  $\det(A) = |A| = ad - bc$ 。

(ii) 矩陣  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  之行列式為  $|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$  或

$$|A| = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{等。}$$