幾何 II - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/geometry_2.html

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)

數學高二下與近代物理 各... | 幾何 II | 幾何 (I)

網頁(P) 工具(O)

基本技巧 sin(x)sin(y) 怎麼積分

積化和差

積化和差公式

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

捲積 (convolution)

http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

http://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html

富利葉轉換

非週期性函數 轉換 f(x) -> F(k) 。

幾何 II - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/geometry_2.html

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)

數學高二下與近代物理 各... 幾何 II 幾何 (I)

網頁(P) 工具(O)

對於任何週期性函數，都可以用些正弦與餘弦函數展開，如下：

Using the method for a generalized Fourier series, the usual Fourier series involving sines and cosines is obtained by taking $f_1(x) = \cos x$ and $f_2(x) = \sin x$. Since these functions form a complete orthogonal system over $[-\pi, \pi]$, the Fourier series of a function $f(x)$ is given by

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \tag{6}$$

where

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{7}$$

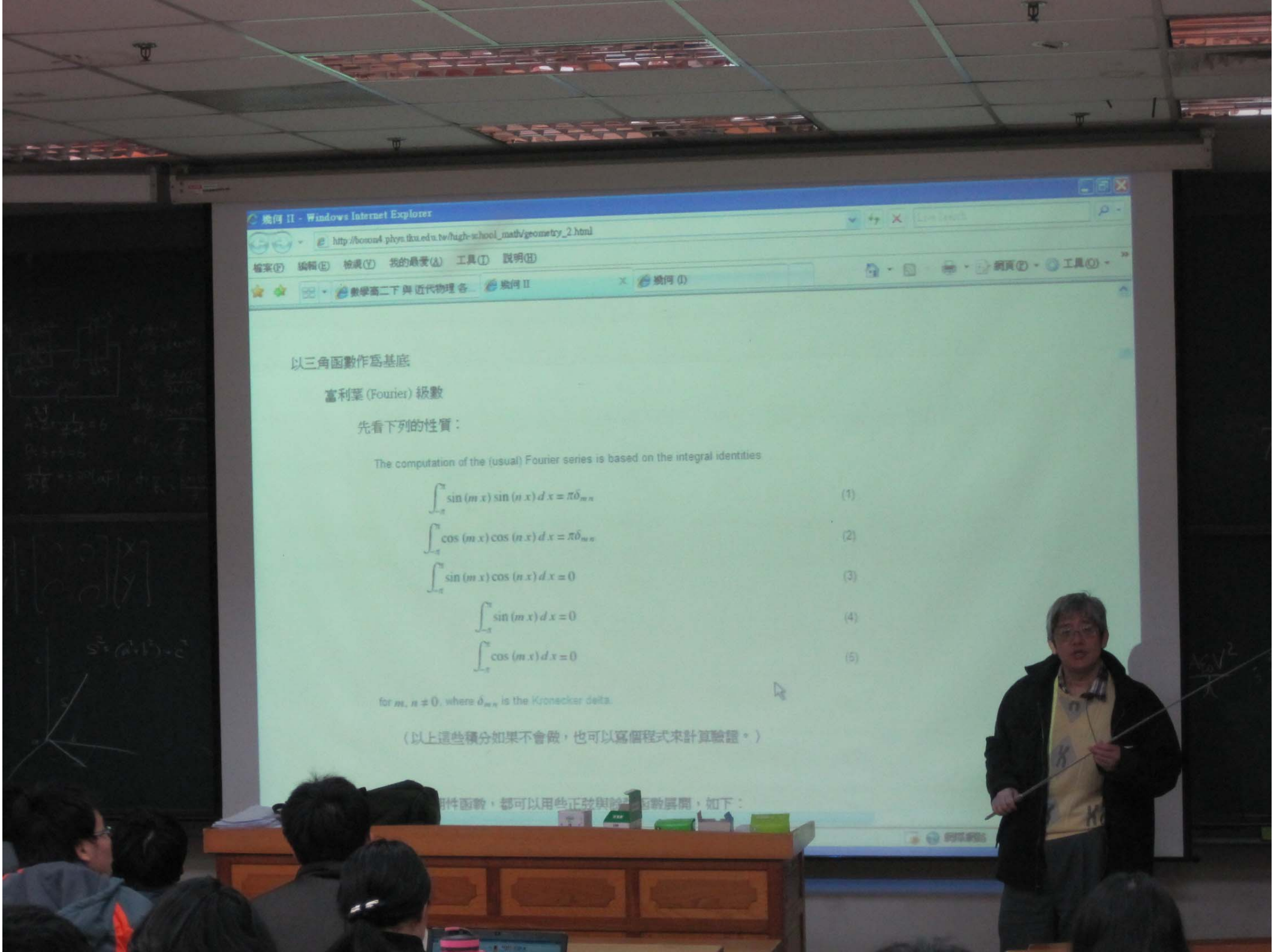
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \tag{9}$$

and $n = 1, 2, 3, \ldots$. Note that the coefficient of the constant term a_0 has been written in a special form compared to the general form for a generalized Fourier series in order to preserve symmetry with the definitions of a_n and b_n.

如果定義域是長度而不是角度

F... on an interval $[-L, L]$ instead of $[-\pi, \pi]$, a simple change of ... orm the interval of integra... from $[-\pi, \pi]$ to $[-L, L]$ ...


幾何 II - Windows Internet Explorer
http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/geometry_2.html
檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)
數學高二下 與 近代物理 各
幾何 II
幾何 (I)
網頁(P) 工具(O)
以三角函數作爲基底
富利葉 (Fourier) 級數
先看下列的性質：
The computation of the (usual) Fourier series is based on the integral identities
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \pi\delta_{mn}$ (1)
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \pi\delta_{mn}$ (2)
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$ (3)
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,dx = 0$ (4)
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 0$ (5)
for $m, n \neq 0$, where δ_{mn} is the Kronecker delta.
（以上這些積分如果不會做，也可以寫個程式來計算驗證。）

捲積 (convolution)

http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

http://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html

富利葉轉換

非週期性函數，有富利葉轉換 f(x) -> F(k) 。

如何看出富利葉轉換是一種基底展開？積分就相當於加總。以 e^{ikx} 作爲基底展開原函數。

繞射與晶體結構

原子的假說（原子論的復興）

原子論的復興

反應物與生成物的比例

氣體動力論預測氣體方程式

解釋布朗運動導出出擴散係數

幾何 II - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/geometry_2.html

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)

數學高二下 與 近代物理 各... 幾何 II 幾何 (I)

網頁(P) 工具(O)

有序的排列與晶體的天然外形

有人用原子的

固定特定晶面的理由

三度空間的物件：點、線、面、體

直線

如何寫下一條直線的方程式？

如何寫下一個平面的方程式？

曲線

合宜的參數表示法

一條曲線是可以用參數來表示的，只要這個參數滿足一些基本的、不太離譜怪異的要求。

曲線的範例：

點集合 (x_1, x_2) 的一般形式用極座標表示

$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$

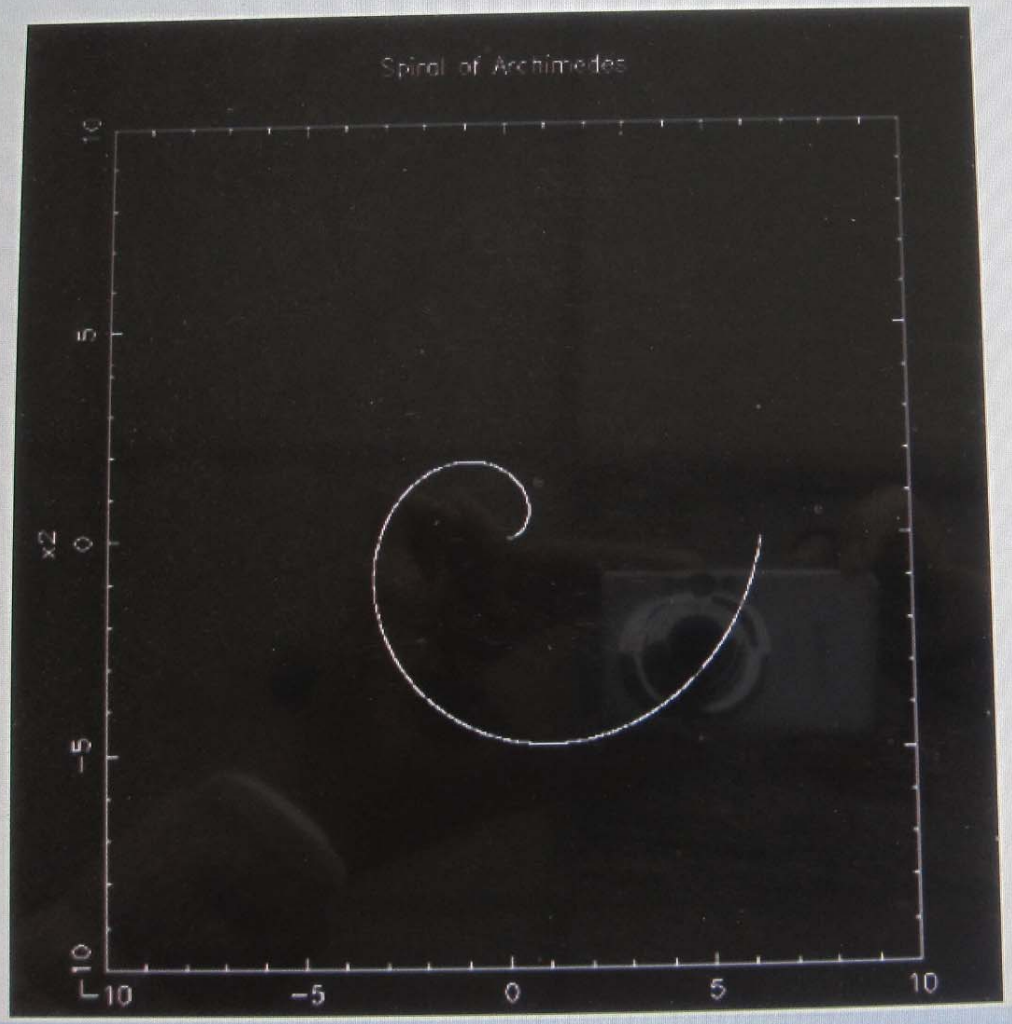
阿基米德螺線

依上面定義的 (x_1, x_2)，其中

阿基米德螺線

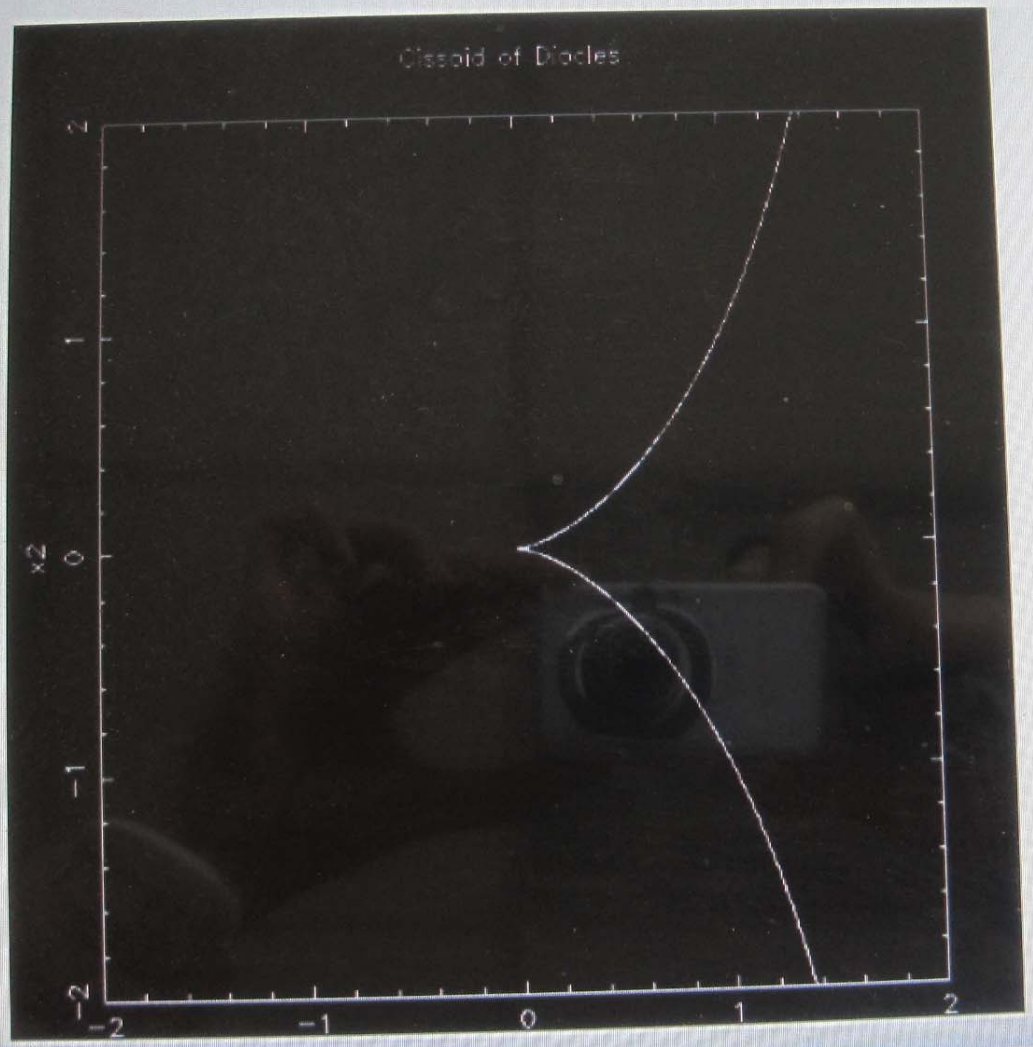
依上面定義的 (x_1, x_2)，其中

$r = a\theta, (a \neq 0)$



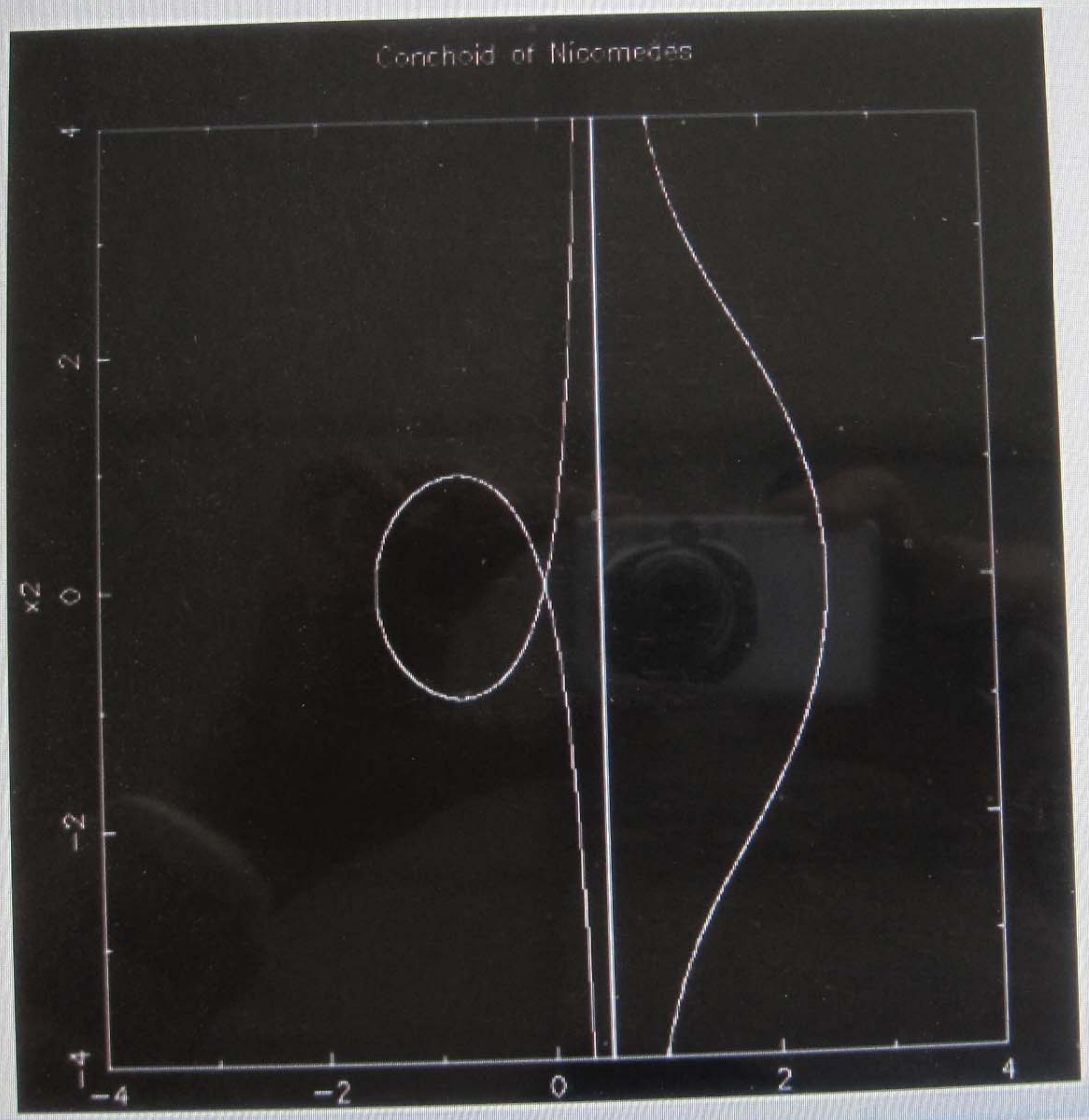
狄奧克勒斯

$r = 2c\sin^2\theta / \cos\theta, (c \neq 0)$



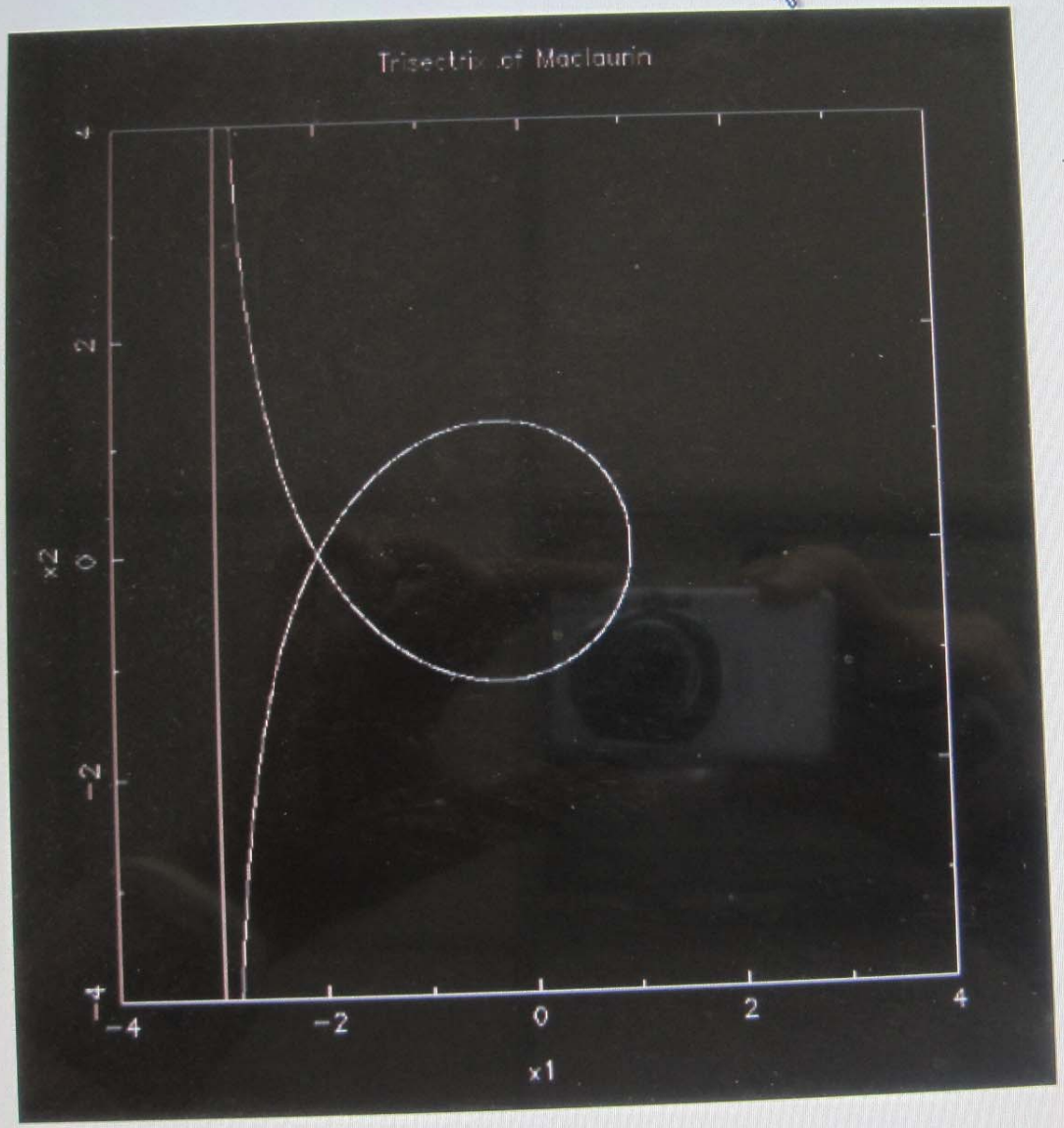
Conchoid of Nicomedes

$r = a / \cos\theta + c, (a \neq 0, c \neq 0)$



Trisectrix of Maclaurin

$r = a / \cos(\theta/3)$, ($a \neq 0, \theta = 0 \sim 3\pi$)



產生上圖的程式 trisectrix f maclaurin f

弧長作爲曲線的自然參數

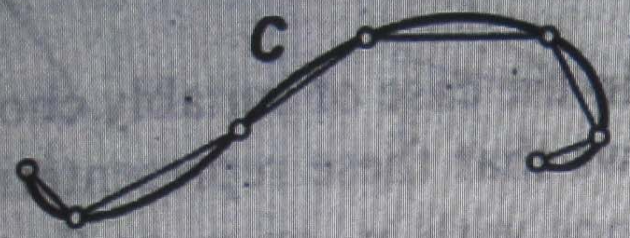


Fig. 9.1. Arc of a curve and polygon of chords

弧長的觀念，可以從多邊線段的長度來思考。上圖每一直線段都可由畢氏定理明確得出〈因爲我們知道那些點的 x 及 y 座標〉，故可加得總長。如果切分越來越細，而總長趨於某一定值極限。

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}\, dt$$

這個 l 可定被證明將與選取參數表示法無關。〈但這個 l 真的是我們所認知的弧長這種東西嗎？怎麼看出來？關鍵在 dx = x-dot dt〉

這個 l 可定被證明將與選取參數表示法無關。（但這個 l 真的是我們所認知的弧長這種東西嗎？怎麼看出來？關鍵在 dx = x-dot dt）

弧長本身可以依其長度發展的變化而拿來當作一個表示曲線的參數，它與原參數之間的關係只要仿照上式定義來定成以下的形式即可：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}\, d\bar{t}$$

利用這個定義，可證明（在此不列），弧長本身滿足作爲曲線之參數表示法的規定要求，它的確是可以拿來作爲描述曲線的參數。

這個 s 真的之具有

$$\text{symbolically } d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

根據畢氏定理（二維的連套用兩次），可以確認 s 真的具有弧長的意義

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}$$

範例：圓螺旋線

Example 9.1 (Circular helix). From (7.4) we obtain

$$\dot{\mathbf{x}} = (-r\sin t, r\cos t, c), \quad \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} = r^2 + c^2, \quad s(t) = t\sqrt{(r^2 + c^2)}.$$

補充思考：

如果我們要用電腦去表現任何的曲線，不管拿到的是公式的 x(t) 或是數據的 X(I)，我們都能自行建立合適的參數來繪圖。

這裏既然提出了弧長可做爲參數使用了，則座標對參數之微分就有對特別的 s 及一般的 t 了，以下用 prime 及 dot 在符號上區分它們的不同：

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

斜率、曲率、扭率

切線方向（斜率）

曲線進展的方向是

$$\frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h}$$

上式右邊右除以 h，都沒有關係的。

曲線進展的方向是

$$\frac{\mathbf{x}(s+h)-\mathbf{x}(s)}{h}$$

上式有沒有除以 h 都沒有關係的。

取極限的情況，可得單位切（線）向量

$$\mathbf{t}(s)=\mathbf{x}'(s)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{x}(s+h)-\mathbf{x}(s)}{h}$$

如果換從在參數 t 的表象（表示法）裏，則有

$$\mathbf{x}'=\dot{\mathbf{x}}t'=\dot{\mathbf{x}}/\dot{s}$$

利用以下性質（由 s(t) 的定義可看出）

$$\dot{s}^2=\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}}$$

便可得到

$$\mathbf{t}(t)=\dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}|$$

便可得到

$$\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}|$$

如此可以看得出它的確是單位向量

曲率

切線方向如果一直不變，就是一條直線（相對於其所在的空間而言）。

如果切線單位向量隨著參數而改變，必定產生彎曲

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$$

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)| = \sqrt{(\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{x}''(s))}$$

曲率半徑

$$\rho(s) = 1/\kappa(s)$$

幾何 (I) - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/geometry_1.html

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)

數學高二下與近代物理 各... 幾何 II 幾何 (I)

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{[(\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})^2]}}{(\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}})^{3/2}}$$

$$\mathbf{p}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{p}(s)$$

t、p、b 形成右手系座標軸

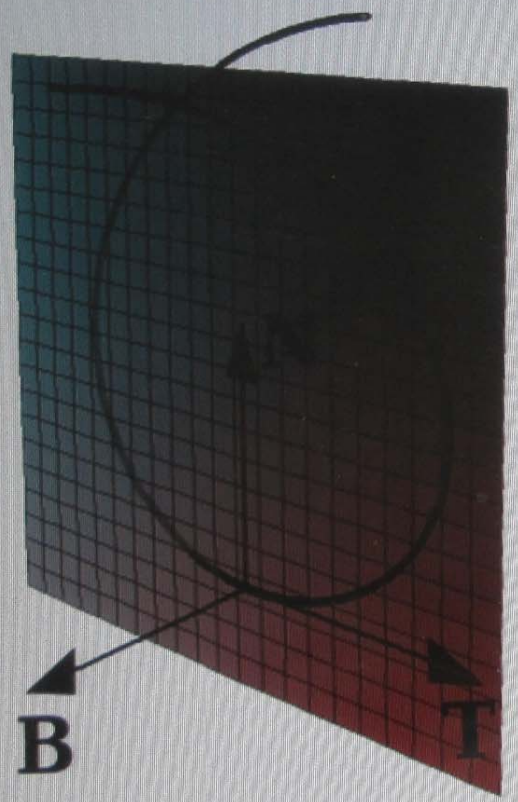
扭率

曲率測度曲線偏離切線方向直行的程度，而扭率則測度偏離密切面（osculating plane，即 t 與 p 構成的面）

網際網路

扭率

曲率測度曲線偏離切線方向直行的程度，而扭率則測度偏離密切面（osculating plane，即 t 與 p 構成的面）的程度



我們可以看出

$$\mathbf{b}' = \alpha \mathbf{p}$$

定爲如下

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p}$$

由於 b' 與 p 平行，故扭率爲

$$\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$$

重要性質

若將一條曲線的局部變化以泰勒展開式加以分析，則會發現，以弧長爲參數，以 t、p、b 爲 x1、x2、x3 的座標軸，則 x1、x2、x3 的變化全由弧長、曲率與扭率決定，這個公式叫做正則表象（canonical representation）。

事實上，曲率與扭曲唯一決定了一條曲線（在不計位置的情況下），。

平面

曲面

空間

空間是幾何的舞台，抑或是演出者？

維度

測度（metric，定距離）

d(P,Q) 必須是實數、有限、非負值

d(P,Q) = 0 若且唯若 P = Q（即 P 與 Q 是同一個點）

d(P,Q) = d(Q,P)

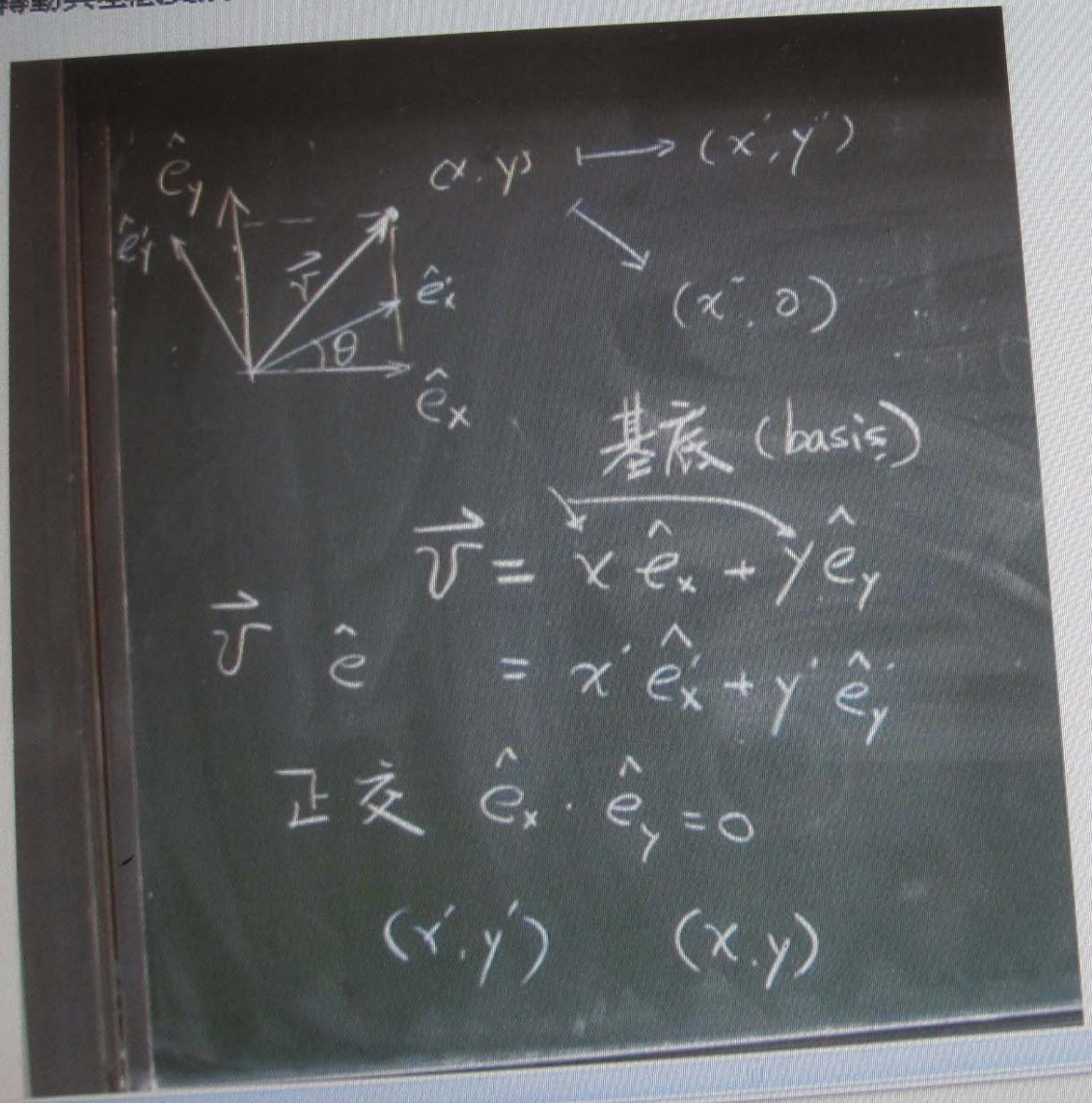
d(P,Q) <= d(P,R) + d(R,Q)（其中 R 是異於 P, Q 的另一點，這一條件也叫做三角不等式）

空間的平坦與彎曲

大家看過線的彎曲，能否想像面的彎曲及空間的彎曲？

幾何 II

座標轉動與基底變換



$$\hat{e}_x' = (\hat{e}_x' \cdot \hat{e}_x)\,\hat{e}_x + (\hat{e}_x' \cdot \hat{e}_y)\,\hat{e}_y$$

$$\hat{e}_y' = (\hat{e}_y' \cdot \hat{e}_x)\,\hat{e}_x + (\hat{e}_y' \cdot \hat{e}_y)\,\hat{e}_y$$

$$= x'\,\hat{e}_x' + y'\,\hat{e}_y'$$

$$= [\text{可算}]\,\hat{e}_x + [\text{可算}]\,\hat{e}_y$$

$$= x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y$$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{e}_x)\,\hat{e}_x + (\vec{v} \cdot \hat{e}_y)\,\hat{e}_y$$

$$|\vec{v}|\cos\alpha$$

$$= (\vec{v} \cdot \hat{e}_y')\,\hat{e}_y' + (\vec{v} \cdot \hat{e}_y')\,\hat{e}_y'$$

函數空間

基底函數與其正交性、完備性

函數能不能像向量那樣以基底（基底函數）來展開？

$$f(x) = \square\, e_1(x) + \square\, e_2(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, x^n$$

$$f(x) = [\,0\,]\, e_1(x) + [\,0\,]\, e_2(x) + \cdots + f(x)$$

正交基底函數

$(f \cdot g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ 內積