

基本技巧 $\sin(x)\sin(y)$ 怎麼積分

積化和差

積化和差公式

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

捲積 (convolution)

<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>

<http://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html>

富利葉轉換

非週期性函數 → 傅利葉轉換 $f(x) \rightarrow F(k)$



幾何 II - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.ntu.edu.tw/high-school_math/geometry_2.html

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

數學高二下與近代物理各... 標題 II

Live Search

對於任何週期性函數，都可以用些正弦與餘弦函數展開，如下：

Using the method for a generalized Fourier series, the usual Fourier series involving sines and cosines is obtained by taking $f_1(x) = \cos x$ and $f_2(x) = \sin x$. Since these functions form a complete orthogonal system over $[-\pi, \pi]$, the Fourier series of a function $f(x)$ is given by

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad (6)$$

where

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (9)$$

and $n = 1, 2, 3, \dots$. Note that the coefficient of the constant term a_0 has been written in a special form compared to the general form for a generalized Fourier series in order to preserve symmetry with the definitions of a_n and b_n .

如果定義域是長度而不是角度

For a function defined on an interval $[-L, L]$ instead of $[-\pi, \pi]$, a simple change of variables converts the interval of integration from $[-\pi, \pi]$ to $[-L, L]$ at



A teacher is giving a lecture in a classroom. The teacher is standing on the right side of the image, holding a pointer stick and speaking. In the background, there is a large projection screen displaying a slide from a Windows Internet Explorer browser window. The slide is titled "以三角函數作為基底" (Using trigonometric functions as basis) and discusses Fourier series properties. The slide includes several mathematical integrals and their results. The teacher is gesturing towards the screen while speaking.

以三角函數作為基底

富利葉 (Fourier) 級數

先看下列的性質：

The computation of the (usual) Fourier series is based on the integral identities

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi\delta_{mn} \quad (1)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi\delta_{mn} \quad (2)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (3)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = 0 \quad (4)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0 \quad (5)$$

for $m, n \neq 0$, where δ_{mn} is the Kronecker delta.

(以上這些積分如果不會做，也可以寫個程式來計算驗證。)

在教室的黑板上，可以看到一些手写计算和公式，包括 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ 和 $\sqrt{2}$ 。

捲積(convolution)

<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Convolution Theorem.html>

富利葉轉換

非週期性函數，有富利葉轉換 $f(x) \rightarrow F(k)$ 。

如何看出富利葉轉換是一種基底展開？積分就相當於加總。以 e^{ikx} 作為基底展開原函數。

統射與晶體結構

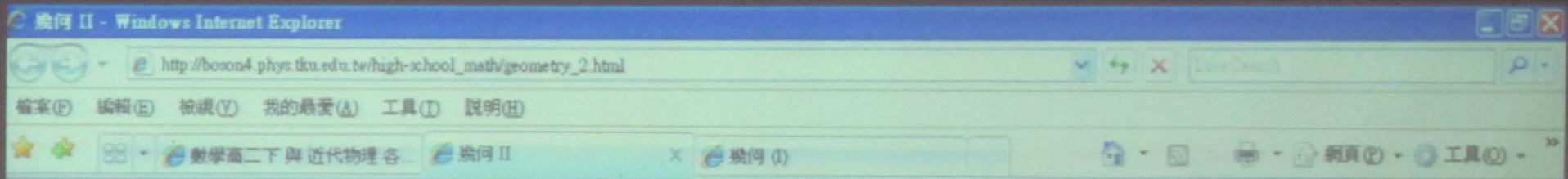
原子的假說（原子論的復興）

原子論的復興

反應物與生成物的比例

氣體動力論預測氣體方程式

解釋布朗運動導出擴散係數



有序的排列與晶體的天然外形



有人用原子的排列來固定特定晶面的理由

檔案(F) 捷徑(U) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

數學高二下與近代物理各...

幾何(I)

家 異常 網頁(W) 工具(O) »

三度空間的物件：點、線、面、體

直線

如何寫下一條直線的方程式？

如何寫下一個平面的方程式？

曲線

合宜的參數表示法

一條曲線是可以用參數來表示的，只要這個參數滿足一些基本的、不太離譜怪異的要求。

曲線的範例：

點集合 (x_1, x_2) 的一般形式用極座標表示

$$x_1 = r \cos\theta, x_2 = r \sin\theta$$

阿基米德螺線

依上面定義的 (x_1, x_2) ，其中

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(T) 說明(H)

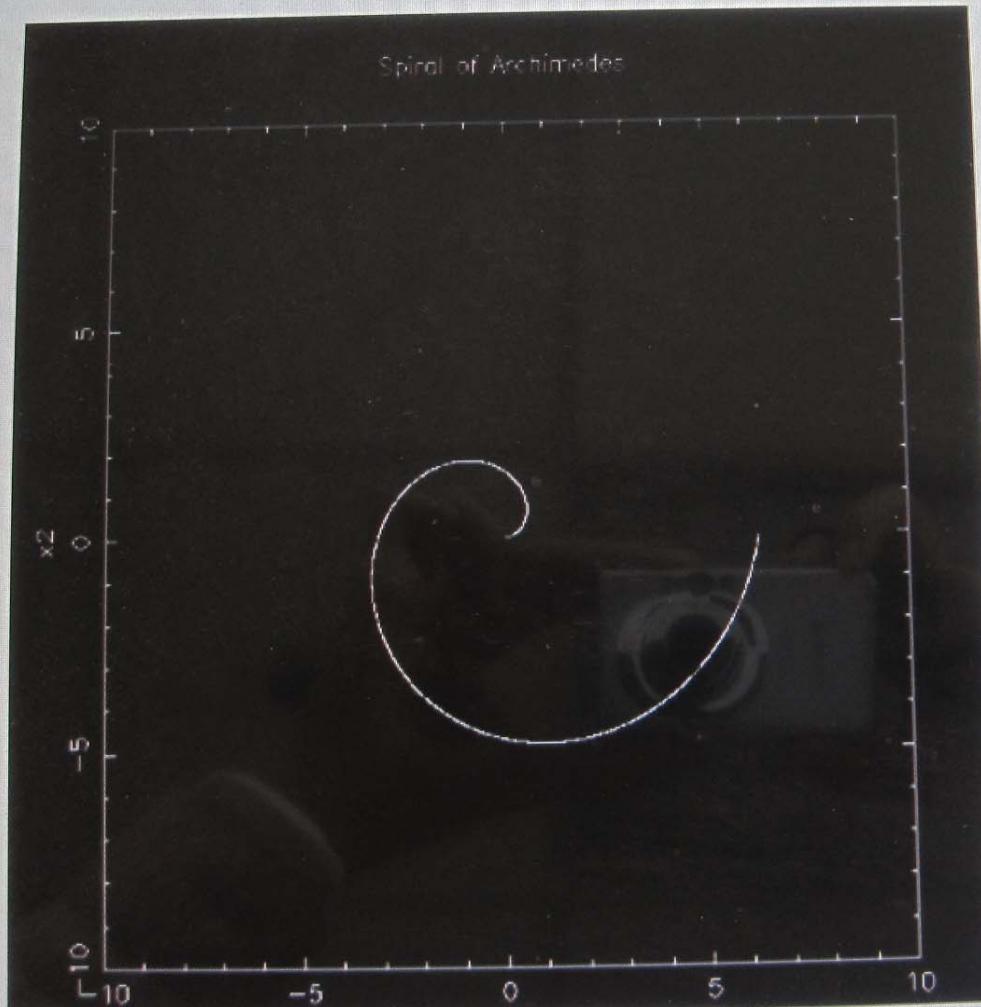
數學高二下與近代物理各... 圖像 II

幾何 (I)

阿基米德螺旋線

依上面定義的 (x_1, x_2) ，其中

$$r = a\theta, (a \neq 0)$$



檔案① 檔案② 印表③ 我的捷徑④ 工具⑤ 說明⑥

數學高二下與近代物理各...

幾何 II

幾何 (I)

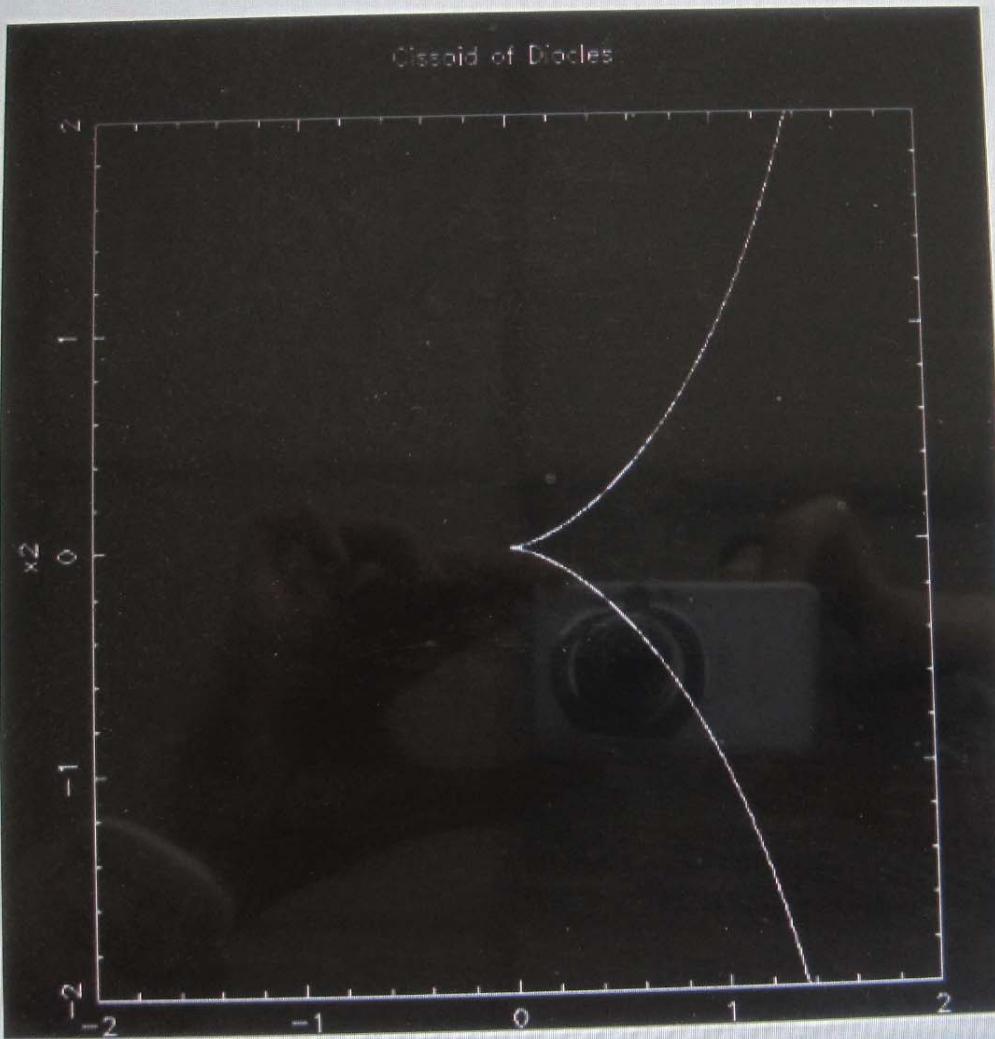
X



狄奧克勒斯



$$r = 2c \sin^2\theta / \cos\theta, (c \neq 0)$$



網際網路

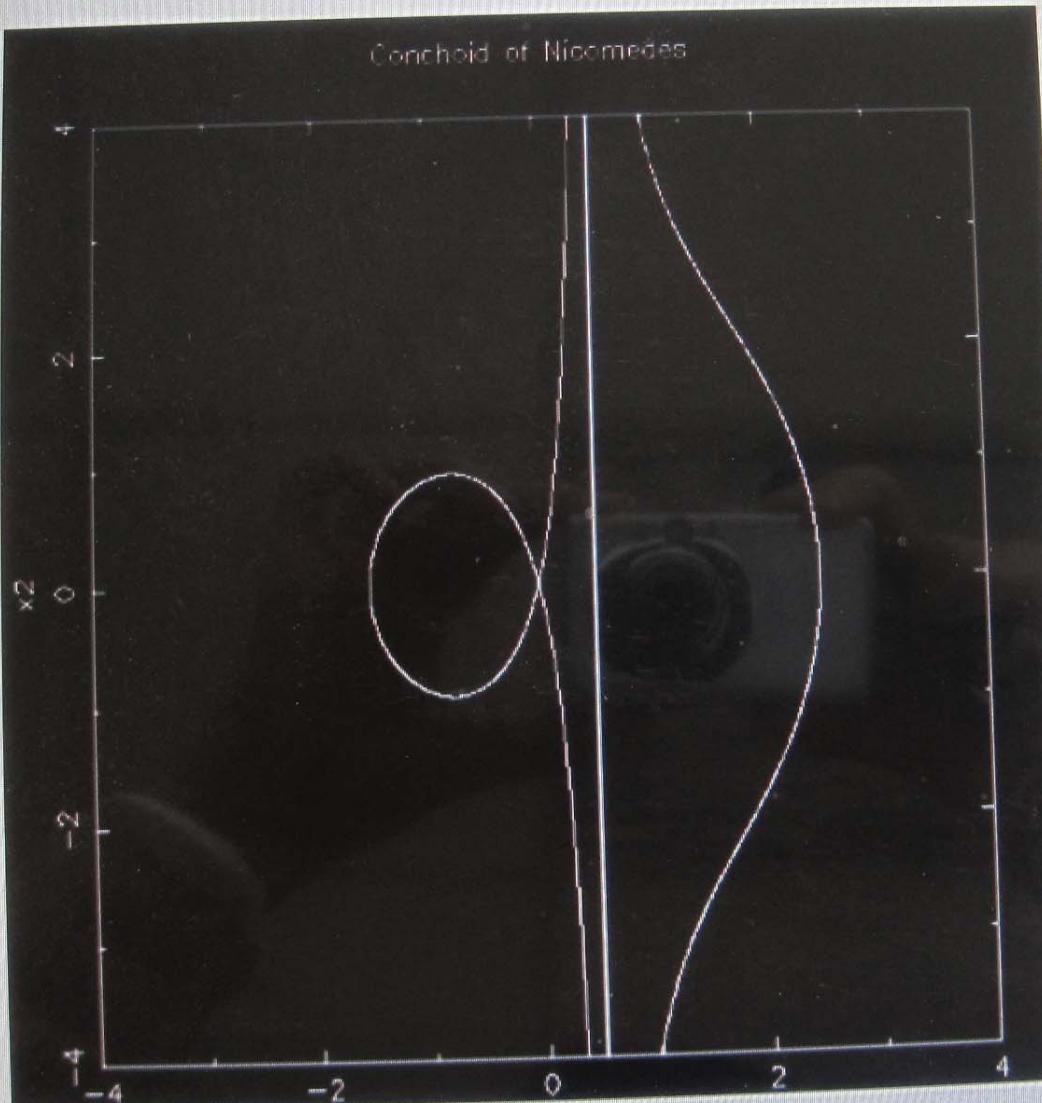
100

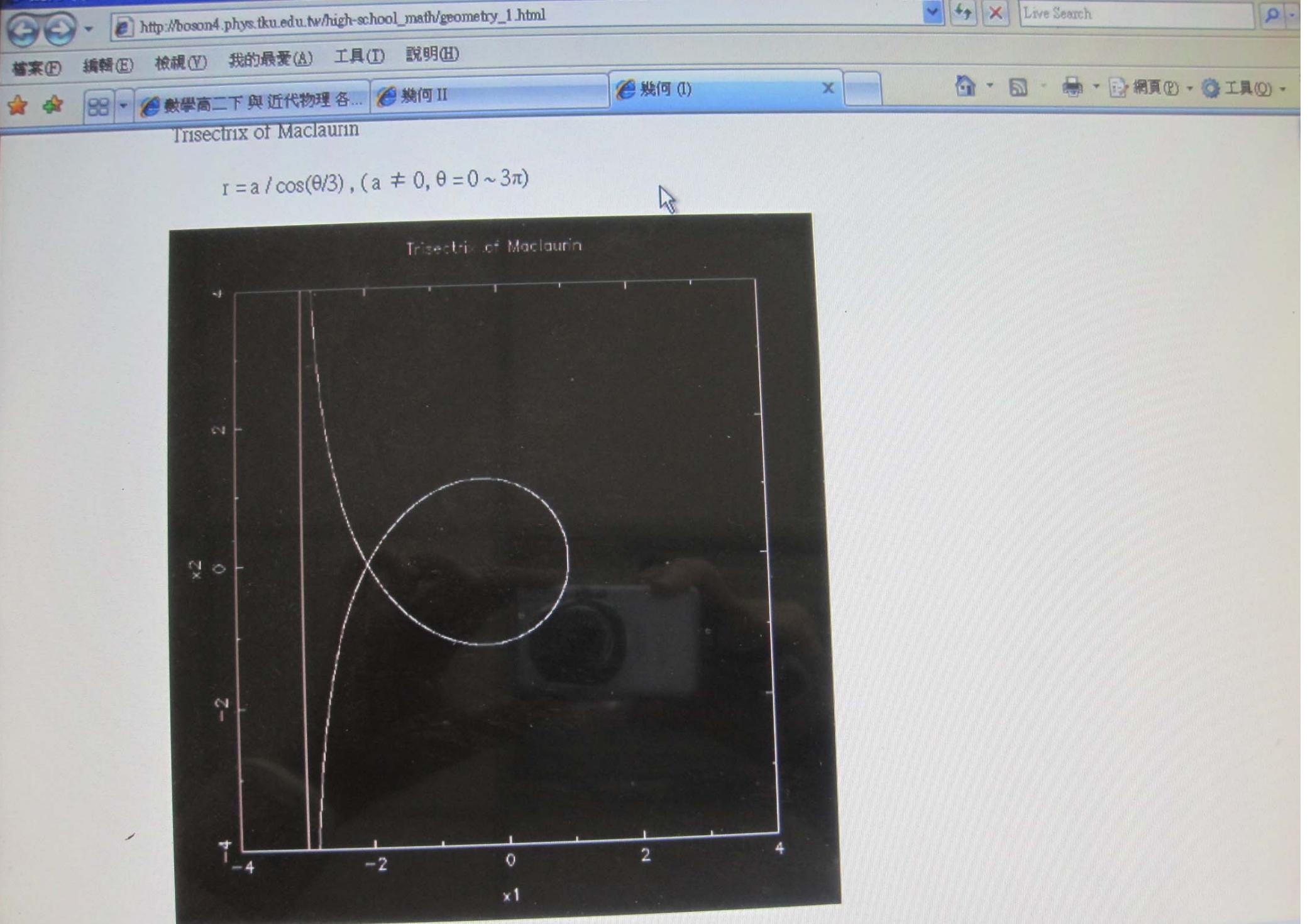
開始

幾何 (I) - Windows In...

Conchoid of Nicomedes

$$r = a / \cos\theta + c, (a \neq 0, c \neq 0)$$





產生上圖的程式 trisectrix_f_maclaurin.f

弧長作為曲線的自然參數

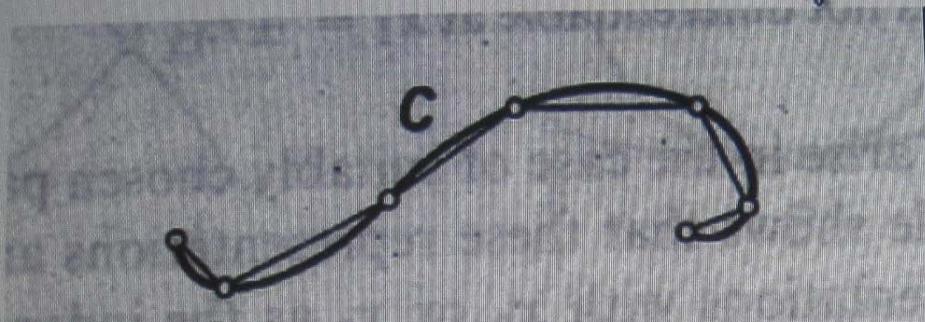


Fig. 9.1. Arc of a curve and polygon of chords

弧長的觀念，可以從多邊線段的長度來思考。上圖每一直線段都可由畢氏定理明確得出（因為我們知道那些點的x及y座標），故可加得總長。如果切分越來越細，而總長趨於某一定值極限。

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})} dt$$

這個l可定被證明將與選取參數表示法無關。（但這個l真的是我們所認知的弧長這種東西嗎？怎麼看出來？關鍵在 $d\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \text{dot } dt$ ）

這個！可定被證明將與選取參數表示法無關。（但這個！真的是我們所認知的弧長這種東西嗎？怎麼看出來？關鍵在 $dx = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt$ ）

弧長本身可以依其長度發展的變化而拿來當作一個表示曲線的參數，它與原參數之間的關係只要仿照上式定義來完成以下的形式即可：

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})} dt$$

利用這個定義，可證明（在此不列），弧長本身滿足作為曲線之參數表示法的規定要求，它的確是可以拿來作為描述曲線的參數。

這個 s 真的具有

symbolically $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$

根據畢氏定理（二維的連套用兩次），可以確認 s 真的具有弧長的意義

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

範例：圓螺旋線

Example 9.1 (Circular helix). From (7.4) we obtain

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

數學高二下與近代物理各... 圖形 II 幾何(I)

$\dot{\mathbf{x}} = (-r \sin t, r \cos t, c), \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = r^2 + c^2, s(t) = t\sqrt{r^2 + c^2}.$

補充思考：

如果我們要用電腦去表現任何的曲線，不管拿到的是公式的 $x(t)$ 或是數據的 $X(t)$ ，我們都能自行建立合適的參數來繪圖。

這裏既然提出了弧長可做為參數使用了，則座標對參數之微分就有特別的 s 及一般的 t 了，以下用 prime 及 dot 在符號上區分它們的不同：

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

斜率、曲率、扭率

切線方向（斜率）

曲線進展的方向是

$$\frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h}.$$

曲線進展的方向是

$$\left| \frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h} \right|$$



上式有沒有除以 h 都沒有關係的。

取極限的情況，可得單位切（線）向量

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h} \right|$$

如果換從在參數 t 的表象（表示法）裏，則有

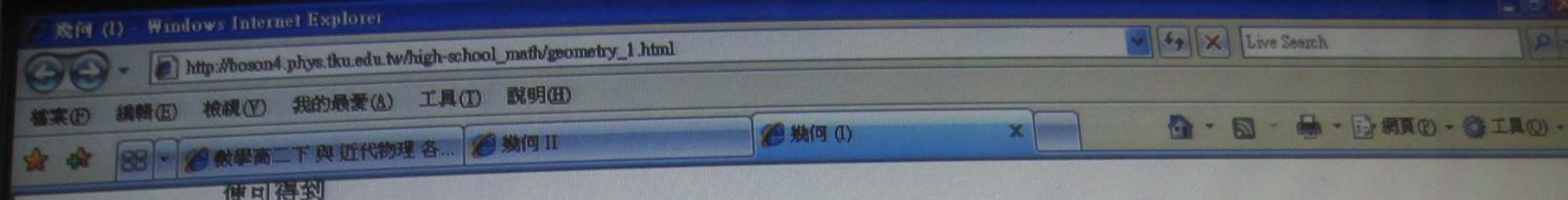
$$\mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}} \mathbf{t}' = \dot{\mathbf{x}} / \dot{s}$$

利用以下性質（由 $s(t)$ 的定義可看出）

$$\dot{s}^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

便可得到

$$\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{x}} / |\dot{\mathbf{x}}|$$



便可以得到

$$\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{x}} / |\dot{\mathbf{x}}|$$

如此可以看得出它的確是單位向量

曲率

切線方向如果一直不變，就是一條直線（相對於其所在的空間而言）。

如果切線單位向量隨著參數而改變，必定產生彎曲

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$$

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)| = \sqrt{(\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{x}''(s))}$$

曲率半徑

$$\rho(s) = 1/\kappa(s)$$

幾何 (I) - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.fku.edu.tw/high-school_math/geometry_1.html

檔案(F) 檢輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

數學高二下與近代物理各... 圖像 II 幾何 (I)

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{[(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2]}}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^{3/2}}$$

$$\mathbf{p}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{p}(s)$$

\mathbf{t} 、 \mathbf{p} 、 \mathbf{b} 形成右手系座標軸

扭率

曲率測度曲線偏離切線方向直行的程度，而扭率則測度偏離密切面 (osculating plane, 即 \mathbf{t} 與 \mathbf{p} 構成的面)

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

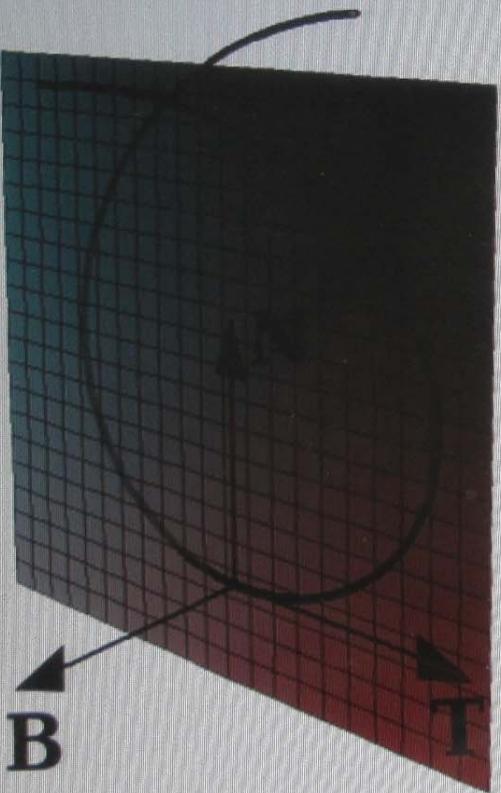
數學高二下 與近代物理 各...

幾何 II

家 畫印 網頁(W) 工具(O) >

扭率

曲率測度曲線偏離切線方向直行的程度，而扭率則測度偏離密切面 (osculating plane, 即 t 與 p 構成的面) 的程度



我們可以看出

$$b' = \alpha p$$

幾何 (I) - Windows Internet Explorer

http://boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_y/math/geometry_1.html

Live Search

檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 我的最愛(A) 工具(I) 說明(H)

數學高二下與近代物理各... 圖像 II 幾何 (I)

定為如下

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p}$$

由於 \mathbf{b}' 與 \mathbf{p} 平行，故扭率為

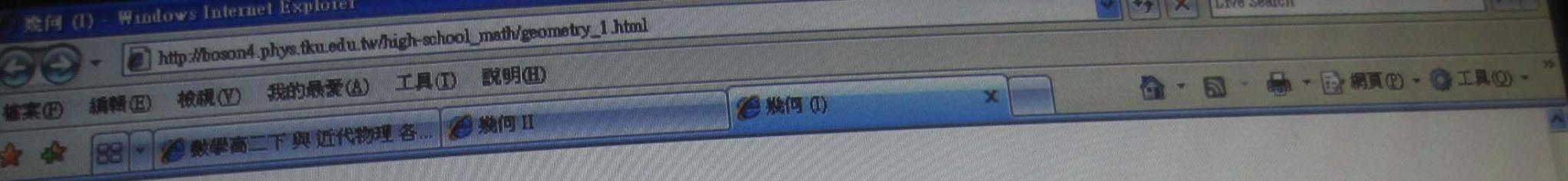
$$\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$$

重要性質

若將一條曲線的局部變化以泰勒展開式加以分析，則會發現，以弧長為參數，以 t 、 \mathbf{p} 、 \mathbf{b} 為 x_1 、 x_2 、 x_3 的座標軸，則 x_1 、 x_2 、 x_3 的變化全由弧長、曲率與扭率決定，這個公式叫做正則表象 (canonical representation)。

事實上，曲率與扭曲唯一決定了一條曲線（在不計位置的情況下），。

平面



曲面

空間

空間是幾何的舞台，抑或是演出者？

維度

測度 (metric, 定距離)

$d(P,Q)$ 必須是實數、有限、非負值

$d(P,Q) = 0$ 若且唯若 $P = Q$ (即 P 與 Q 是同一個點)

$d(P,Q) = d(Q,P)$

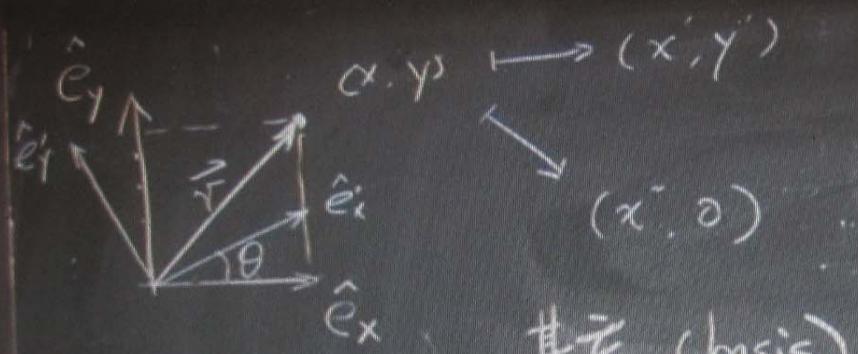
$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ (其中 R 是異於 P, Q 的另一點，這一條件也叫做三角不等式)

空間的平坦與彎曲

大家看過線的彎曲，能否想像面的彎曲及空間的彎曲？

幾何 II

座標轉動與基底變換



基底 (basis)

$$\vec{v} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$$

$$\vec{v} = x' \hat{e}'_x + y' \hat{e}'_y$$

正交 $\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0$

$$(x', y') \quad (x, y)$$

$$\hat{e}_x' = \underline{(\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x)} \hat{e}_x + \underline{(\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y)} \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_y' = \underline{(\hat{e}_y \cdot \hat{e}_x)} \hat{e}_x + \underline{(\hat{e}_y \cdot \hat{e}_y)} \hat{e}_y$$

$$\rightarrow = x' \hat{e}_x + y' \hat{e}_y$$

$$= \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right] \hat{e}_x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \hat{e}_y$$

$$= x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{e}_x) \hat{e}_x + (\vec{v} \cdot \hat{e}_y) \hat{e}_y$$

$$= |\vec{v}| \cos \alpha \hat{e}_x + (\vec{v} \cdot \hat{e}_y) \hat{e}_y$$



函數空間

基底函數與其正交性、完備性

函數能不能像向量那樣以基底（基底函數）來展開？

The chalkboard contains several mathematical expressions:

$$f(x) = \boxed{} e_1(x) + \boxed{} e_2(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) x^n$$

$$f(x) = [0]e_1(x) + [0]e_2(x)$$

正交基底函數

(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx