

排列組合

1. 重覆排列： n 個取 r 個

$$n \quad n-1 \quad \dots \quad n-r+1$$

$$\square \quad \square \quad \square \dots \square \quad n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1) = \text{(不可重覆時)}$$

$$n \times n \times \dots \times n$$

重覆組合：

不可重覆時： $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

重覆時： $H_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C_r^n, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_r$

Ex.: 8 個蘋果分給 4 人甲、乙、丙、丁(可重覆取)

$$H_4^8 = \frac{11!}{8!3!} =$$

2. Binomial distribution:  $(p + q)^n = C_0^n q^n + C_1^n q^{n-1} p + C_2^n q^{n-2} p^2 + \dots +$

Ex.: 一家有 4 個小孩(男女生育率同), P(生男)=0.5, q(生女)=0.5

(1) 如果女至少一人, P' = ?

$$(p + q)^4 = q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3$$

$$P' = 1 - 0.5^4 = 0.9375$$

(2) 如果至少一男一女, P'' = ?

$$P'' = 1 - 0.5^4 - 0.5^4 = 0.75$$

Ex.: 丟骰子, 出現 4 點向上之 P=1/6, 4 點不向上 q=1-P=5/6, 問在 9 次擲骰中出現 4 點向上之 P' = ?

$$(P + q)^9 \Rightarrow C_0^9 q^9 + C_1^9 P^1 q^8 + C_2^9 P^2 q^7 + C_3^9 P^3 q^6 + \dots$$

Ex.: 工廠鏢絲釘有 5% 之瑕疵品, 當有 7 個生產品, 問瑕疵品=2 之 P= ? , 瑕疵品>2 之 q = ?

$$P = 5\%$$

$$q = 95\%$$

3.  $C_k^n p^k q^{n-k} \xrightarrow{n \gg 1} \frac{\alpha^k}{k!}, \quad p = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow \alpha = np$  (期望)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha}$$