10/27 高二資優營數學課

eg2 : 在平面上有 12 個點,其中沒有任 3 個共線,問能畫出幾條線?

$$C^{12}_{2} = \frac{12!}{10!2!} = 66 \quad \text{條線.}$$

$$\boxed{C^n_k = C^n_{n-k}} \quad \because \quad C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C^n_{n-k}$$

2. $C^n_k = C^{n-1}_{k-1} + C^{n-1}_k$

pf. $k! = k(k-1)!$

$$\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \frac{(n-1)!k+(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C^n_k$$

· 機率: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(B)}$ (1) 加法原理 (不能同時發生)

(2) 乘法原理 (同一件事有多個步驟)

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

· 二項式定理: $f(x) = (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, $b_k = C^n_k a^{n-k}$

$f'(x) = n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k k x^{k-1}$ 令 x=0 ⇒ (i) $a^n = b_0$

$f''(x) = n(n-1)(x+a)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} b_k k(k-1) x^{k-2}$ 令 x=0 ⇒ (ii) $n a^{n-1} = b_1(k=1\text{才存在})$

(iii) $\dfrac{n(n-1)}{2} a^{n-2} = b_2(k=2\text{才存在})$

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)\cdots(x+a) = \sum_{k=0}^{n} C^n_k x^k a^{n-k}$$

一. 排列 permutation → 從 n 個相異物品取 k 個排列 , $k \leq n$

二. 組合 combination → $C_k^n \equiv {}_nC_k \equiv \binom{n}{k} = \dfrac{P_k^n}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

eg1 : 3 個取 3 個: $p_3^3 = 3!$

eg2 : 有 8 人要排隊拍照

(i) 有 8! 種排法

(ii) 其中 2 人要排在一起,有幾種方式?

idea : (a) 可以先看成 7 個人 : 7!

(b) 2 人位置可以對調,所以共有 <u>7!2!</u> 種排法

eg3 : 有 7 個小孩,其中 3 個姐妹不能夠相鄰

idea : (a) 先讓 4 個人排(有 5 個間隔) : 4!

(b) 讓 3 姐妹排入 5 個間隔 : $4!\ P_3^5$

eg4 : (a)字母 s,t,o,p 排列有 4! 種方法

(b) s,t,e,p,s 呢?

idea : 有 5 個字母 → 5!

因為有兩個 s,要除以 2! → $\dfrac{5!}{2!}$

$\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots}$ 看你有幾種 and 幾個相同的東西 → 把它們除掉

三. $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

eg: 從 8 人取 3 人

8x7x6 , 但是不管排列,要除以 3! → C_3^8