

高資營 101上下學期課表 × 相對論 ×

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

對物理定律的期待

時時適用（古今）

現在學的定律，以後不能用？

處處適用（中外）

出國留學學的，回國竟不能用？

在運動中也對？

一定不對，不然剎車為什麼會跌倒（不是靜者恆靜嗎？）（平移運動）

甩水桶轉，水不落下（離心力）；蘋果會掉下來（萬有引力），月球為什麼不會？（旋轉、轉動）

退一步，接受沒有運動（即靜止）時適用的規則作物理定律？

那，什麼叫做“靜止”？

如果沒法定出那一個絕對靜止的座標系，則退而求其次，希望(1)了解同一物理定律適用（物理現象的表現可以不同）的一系列參考座標。並且(2)不同參考座標之間的現象，我們也可以精確轉換，也就是說，知道一的座標系中的現象大小，可以預測同一事件在另一個座標系被觀察到的大小。

怎樣關係的兩個不互相靜止的座標系，最符合同一物理定律的要求？

試想 $f = ma$ ， a 是加速度，為位置對時間的二次微分，座標系之間無相對加速度（僅相對速度）者，應該會看到同樣的 $f = ma$ 公式，這可以從 $x'(t) = x(t) + v t$ 的轉換，會給出一樣的 a 來了解。

高資營 101上下學期課表 × 相對論 ×

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

慣性座標

慣性座標系：意指未加速的座標，等速移動的座標系都算是。

一個有用的物理定律，是具有在慣性座標系間轉換的不變性 (invariance) 的。例如牛頓運動定律之的 $F = ma$ ，不管要用 x 的座標系還是 x' 的座標系來表示，只要它們都是無加速度的慣性座標系，也就是說 x 與 x' 之間的關係是用 $x = x' + vt$ ，則 $F = ma$ 及 $F = ma'$ 這樣的形式在任何慣性座標都是一樣的（大家可以自己代代看）。

（Maxwell 方程比牛頓定律晚了 200 年，比伽利略晚 300 年。）

伽利略與牛頓的時間與空間

那麼，在慣性座標系之間，與時間、空間有關的物理量如何轉換？以速度以例：

火車行駛時速五十公里、車上乘客靜在車廂內活動位置 x' ，則乘客對地面速度時速 v ，其對於地面的位置 x 可被表示為

$$x_{\text{ground}} = x_{\text{train}} + v_{\text{train}} * t$$

火車行駛時速五十公里、車上乘客向前以球速二十公里投擲棒球，則對於地面而言球速是時速七十公里。速度會相加的這回事，若從寫公式的角度而言，推導過程如下：

$$x_{\text{ball_ground}} = x_{\text{ball_train}} + v_{\text{train}} * t$$

其中

$$x_{\text{ball_train}} = x_{\text{ball_train_0}} + v_{\text{ball_train}} * t$$

上式代入上式得

$$x_{\text{ball_ground}} = x_{\text{ball_train_0}} + v_{\text{ball_train}} * t + v_{\text{train}} * t$$

速率是位置隨時間變化

$$\begin{aligned}v_{\text{ball_ground}} &= \frac{d x_{\text{ball_ground}}}{dt} = 0 + v_{\text{ball_train}} + v_{\text{train}} \\&= v_{\text{ball_train}} + v_{\text{train}}\end{aligned}$$

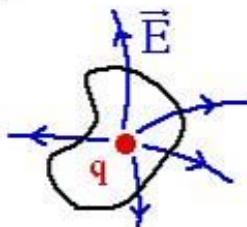
電、磁與馬克斯威爾方程式

電磁學從最早有庫倫定律（靜止電荷量、力、距離的關係）、到高斯定律（電荷如何在空間中建立電場）、以及安培定律（固定電流產生固定磁場）、法拉第定律（變化的磁場導致電流產生），最後再由馬克斯威爾引入位移電流而整合成美麗的四條一組方程式，

Maxwell's Equations

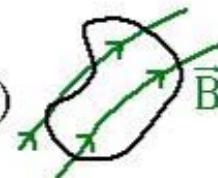
$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gauss's Law



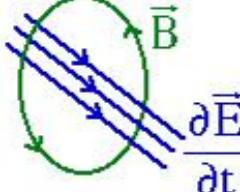
$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

(no monopoles)



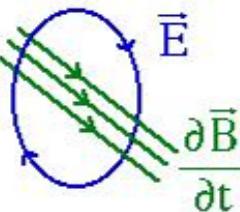
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Ampère's Law
and



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday's Law



高資營 101上下學期課表 × 相對論 ×

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

找尋以太（電磁波的傳播媒介）

馬克斯威爾一直認為有一種傳播電磁波的媒介，如同空氣之於聲音以及水面之於水波一樣。但最大的問題是，觀察不到其應有的效應。

補充：光速量測的歷史

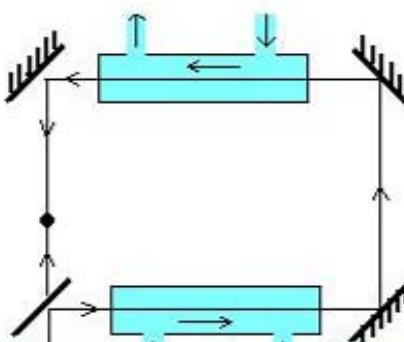
Fizeau 實驗

光速在介質中是慢下來的 c/n ，Fresnel 認為流動介質會進一步 **部分地** 影響通過它的光束之光速。他認為同方向移動介質（如流體）中的光速會是

$$V = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

而不是 $V = c/n + v$ ，這樣他才能解釋為何地表周圍的以太似乎是靜止的，換言之，是因為上式括號裏的 $1 - 1/n^2$ （即所謂的 Fresnel 拖曳係數 (drag coefficient)）很小，本該加上的流速 v 之效應才沒有突顯到介質中光速 c/n 上。（另外，真空的折射率 $n = 1$ ，一般氣壓下空氣的折射率 $n = 1.0003$ 。）

1851 年 Fizeau 用干涉儀與鍍銀半透片進行了以下實驗（詳見維基百科 2），並“印證”（僅 10% 誤差，見參考資料）了 Fresnel 的假想，他真的量到了上式



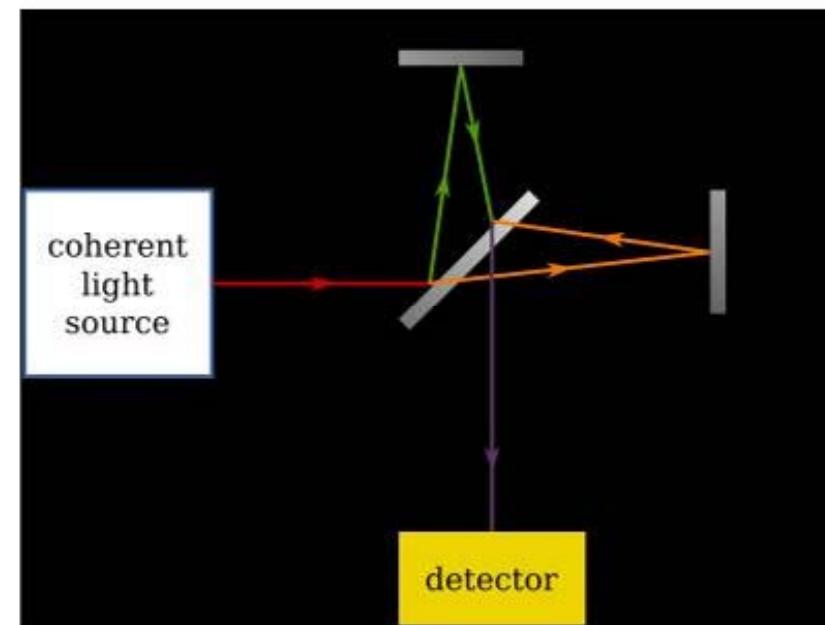
邁可森—莫利 (Michelson-Morley) 之導致確定的光速恆定實驗（有人說這最有名的失敗實驗）

1887 年，

可見光光波的波長非常短（3000 埃到 7000 埃），光速也很快，因此差一點點距離就可以在干涉條紋上看出來。地球有自轉及公轉，若以太在宇宙中是靜止，則地球對之有相對運動。當然還是有人懷疑地球周圍的以太可能被地球帶著走，像大氣一樣。但這想法並沒能提供有進一步證明或是反證的機會（然後相對論被實驗證實後，以太的不存在也就定案了）。

技術上，邁可森需要同一批光子（同調光）走互相垂直的兩個不同路徑。

Michelson-Morley 實驗裝置如下：



兩臂各長 11 公尺，以大理石為底座，裝置浮在水銀上以減振，同時也可以轉動。

此實驗的分析

高資營 101上下學期課表 × 相對論 ×

← → C boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

勞倫茲轉換(閔可夫斯基轉換)

荷蘭科學家 劳倫茲 在眾人想 "修正" 馬克斯威爾方程式不符合伽利略轉換時，發現了用下列方式組去轉換（轉換兩個不同的慣性座標系觀察者所描述的數據）的話，馬克斯威爾方程式可保持原來的形式：

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

其中 β 是 v/c 。

爲了解釋上述以太實驗似乎地球對其無相對速度增加的疑點，勞倫茲首先提出以太會讓長度約短的機制

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

如果它是真的，則套用在上述 M-M 實驗的結果上時

$$t_1 + t_2 = \frac{(2L/c) \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

高資營 101上下學期課表 × 相對論 ×

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

愛因斯坦提出的相對論公設

慣性座標中物理定律形式不變

所有慣性座標中光速恆定

重要的新觀念：同時性（是相對而不是絕對的）

與牛頓、伽利略時空觀很不同的結果是，在相對論之下沒有“同步時間流”這一回事，因此兩個事件是否“同時”發生是取決於觀察者的相對速度狀態，而非絕對的。

（以下，我們要開始允許定義 t 與 t' 為不同）

從愛因斯坦相對論導出勞倫茲轉換

（以下我們來看看，怎樣從愛因斯坦的相對論公設，來導出勞倫茲轉換）

(a) 圖顯示的是一個閃光偵檢器組，以及垂直於運動方向固定距離的鏡子。整組裝置放在車上，車向右以 u 的速率移動。

在不喪失一般性的情況下，令地面觀察者的位置（也就是出發點處）是在 $x = 0$ 。

同樣一個“閃光、反射、偵測”的過程，隨車觀察者看到的是 (a) 標為 primed (S') system；而地面觀察者看到的則是 (b) 標為 unprimed (S) system

現在，隨車觀察者量得到過程時間 t' ，他要怎樣換算出地面觀察者量得到過程時間 t ？

利用兩個系統的光速是一樣的（相對論公設）

$c' = 2D / t'$

$c = 2 \sqrt{[D^2 + (ut/2)^2]} / t$

$c' = c$

相對論 X

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

從愛因斯坦相對論導出勞倫茲轉換

(以下我們來看看，怎樣從愛因斯坦的相對論公設，來導出勞倫茲轉換)

(a) 圖顯示的是一個閃光偵檢器組，以及垂直於運動方向固定距離的鏡子。整組裝置放在車上，車向右以 u 的速率移動。

在不喪失一般性的情況下，令地面觀察者的位置（也就是出發點處）是在 $x = 0$ 。

同樣一個“閃光、反射、偵測”的過程，隨車觀察者看到的是 (a) 標為 primed (S') system；而地面觀察者看到的則是 (b) 標為 unprimed (S) system

現在，隨車觀察者量得到過程時間 t' ，他要怎樣換算出地面觀察者量得到過程時間 t ？

利用兩個系統的光速是一樣的（相對論公設）

$c' = 2D / t'$

$c = 2 \sqrt{[D^2 + (ut/2)^2]} / t$

$c' = c$

即得到

$2D / t' = 2D \sqrt{[1 + (ut/(2D))^2]} / t$

$t' = t / \sqrt{[1 + (ut/(2D))^2]}$

這裏還有 D ，不過沒關係， $D^2 = (ct/2)^2 - (ut/2)^2$ ，即 $(2D)^2 = (ct)^2 - (ut)^2$

因此上式中 $(ut/(2D))^2 = u^2 t^2 / (c^2 t^2 - u^2 t^2) = u^2 / (c^2 - u^2)$ ，即

$1 + (ut/(2D))^2 = 1 + u^2 / (c^2 - u^2) = (c^2 - u^2 + u^2) / (c^2 - u^2) = c^2 / (c^2 - u^2) = 1 / [1 - (u/c)^2]$

$t = t' / \sqrt{[1 - (u/c)^2]}$

還有，也可以這樣推

$$2(ct'/2) = 2D$$

$$\Rightarrow ct' = 2D$$

$$2(ct/2) = 2\sqrt{[D^2 + u^2(t/2)^2]}$$

$$\Rightarrow c^2t^2 = 4D^2 + u^2t^2$$

$$\Rightarrow (c^2 - u^2)t^2 = 4D^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{[c^2 - u^2]} * t = 2D$$

故

$$ct' = 2D = t * \sqrt{[c^2 - u^2]}$$

$$\Rightarrow t' = t * \sqrt{[1 - (u/c)^2]}$$

$$\Rightarrow t = t' / \sqrt{[1 - (u/c)^2]}$$

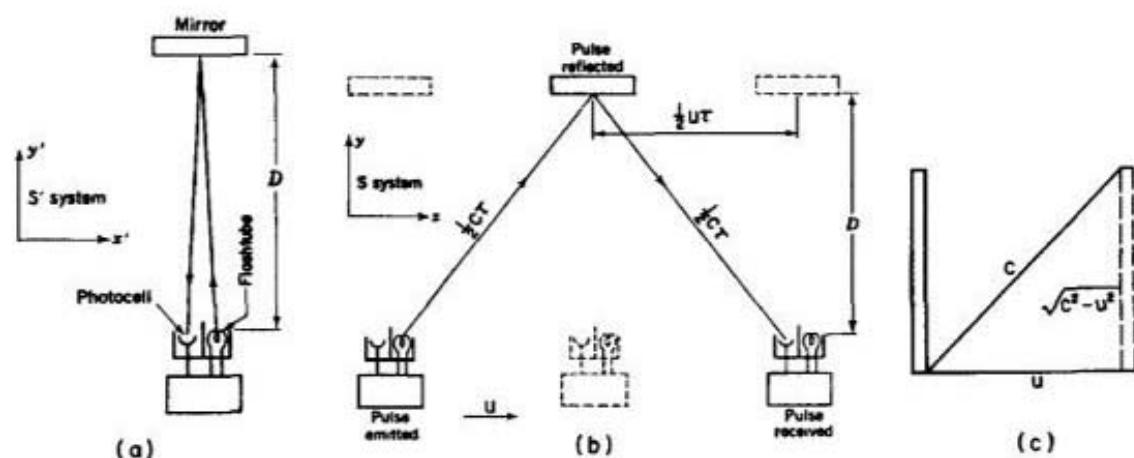


Figure 3-3. (a) A "light clock" at rest in the S' system. (b) The same

相對論

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

clock, moving through the S system. (c) Illustration of the diagonal path taken by the light beam in a moving "light clock."

(另一種推導法)

對於靜止座標系中的觀察者看起來，光走的路徑是斜邊，它的長度若是與平移的部分來比，基於光速固定原則，是 $c : u$ 的比例，也就是說，（基於畢氏定理）與垂直邊的長度比例是 $c : \sqrt{c^2 - u^2}$ 。現在靜止觀察者替移動觀察者想，這道光在移動座標系中走的不是 c 比例的長而是 $\sqrt{c^2 - u^2}$ 比例的長，而光線發射到偵測一樣是要滿足 $dx^2 - c^2t^2 = 0$ 的情況下，唯有（靜止觀察者認為移動觀察者的）時鐘變慢。

$$\sqrt{c^2 - u^2} t = c t'$$

$$t = t' / \sqrt{1 - (u/c)^2}$$

重要結論：不只空間座標要轉換，時間的也要。

範例：車廂中間點向前後同時發球 車上觀察者認為 同時 到達，地面 觀察者認為 不同時 到達。（其他類似的有趣例子還很多）

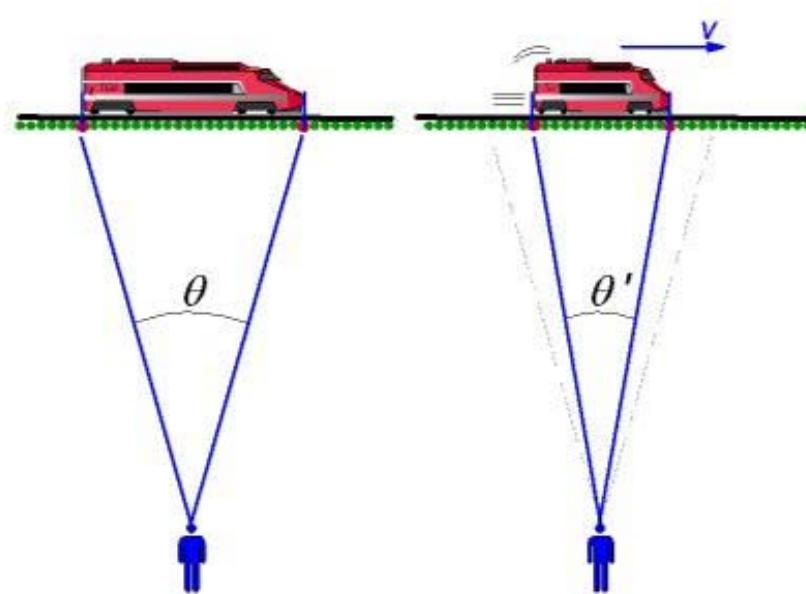
(a) Event Blue (b) Sam detects both events

(c) Sally detects event Red (d) Sally detects event Blue

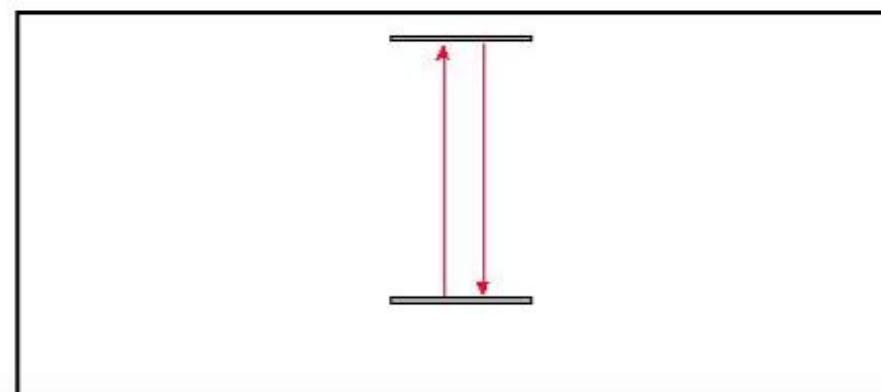
座標、長度、時間、速度相加、質能互換

在靜止的觀察者看來，在動的動體或系統會：

長度縮短

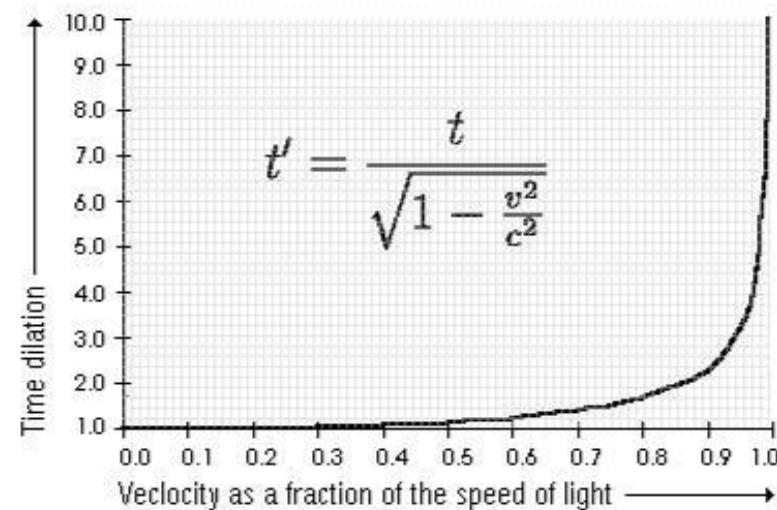


時間膨脹 (Time Dilation)





利用畢氏定理，並認定光在任何慣性座標都是同一個值 c 。



(註：上圖中之 t 即 t_0 也就是上一節式子的 t')

質量增加

$$M = m / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(一些專家主張只談 "靜止質量" 與 "相對運動下的動量"，避免談這種隨速度改變之談相對質量。)

自動幫你試算的網頁 <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/tdil.html>

速度相加公式

愛因斯坦推導出

$$s = \frac{v + u}{\sqrt{1 - \frac{(v+u)^2}{c^2}}}$$

相對論

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html

速度相加公式

愛因斯坦推導出

$$s = \frac{v + u}{1 + (vu/c^2)}.$$

有別於伽利略的

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{u}$$

其中 c 是光速。

質能互換

$$E = m c^2$$

此式的推導，要從動量-能量關係

$$E_r^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

考慮出發，詳請下：

(一個幫助你想像 能量與質量為何是等效、能互換的圖像，見 [連結](#))

新的動量與能量公式

動量

不再是 $p = m v$ ，而是

$$p = \gamma m u$$

其中 u 是某觀察者看到的速度，而 m 永遠指的是靜止質量。這樣定才能滿足動量相關定律（如動量守恆）

相對論 - □ ×

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/relativity.html ☆

(積分過程見課本)

功—功能定理繼續適用，即 $\Delta K = W$ ，則得

$K = (\gamma - 1) m c^2$

故

$E = \gamma m c^2$

上式 E 是相對論下之總能

動量—能量關係

非相對論下 $E = p^2 / 2m$ ，在相對論下

由於 $E = \gamma m c^2$ 、 $p = \gamma m v$ ，而有

$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

請注意這個式子中沒有 γ 、 β 等相對速度有關的量，上式是一個滿足不變性的方程式。其中

$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ 或 $m^2 = (E/c)^2 - (p/c)^2$ 是一個座標轉換不變量。

最有名的物理公式

上式 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ，在靜止的狀態（或座標系） $v = 0$ ，故 $p = \gamma m v = 0$

得 $E^2 = m^2 c^4$ ，即

$E = m c^2$

量子的誕生

近代物理的兩個常數

凱爾文所說的兩朵烏雲

牛頓力學在十七世紀建立古典力學，科學進入新階段，牛頓三大定律及萬有引力公式解釋了所有天文觀察到的現象。之後的兩百年，科學家依牛頓力學的模式建立了聲學、熱學等物理學門。

凱爾文因此說："在己建立的科學大廈中，後世的科學只能作一些零碎修補的工作"。然而，他也指出 "在物理學晴朗的天空遠處，還有兩朵令人不安的小小烏雲"。他指的一個是找尋以太卻總是失敗，另一個則是熱幅射的實驗之無法解釋。

兩朵小烏雲竟帶來大風暴的物理革命

光速 - 變成常數 -> 相對論

普朗克常數 -> 量子論

普朗克常數

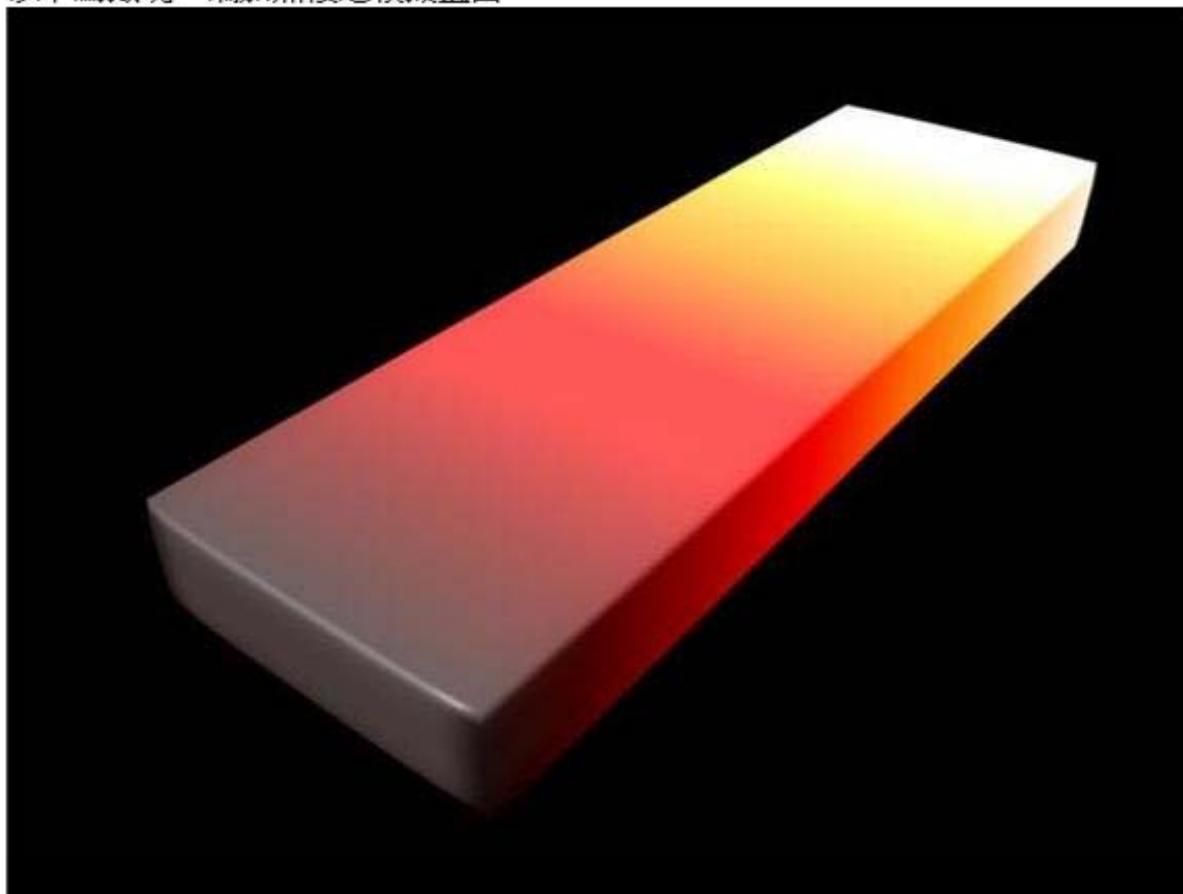
凝體的熱幅射

以下為鐵塊一端加熱後之模擬畫面

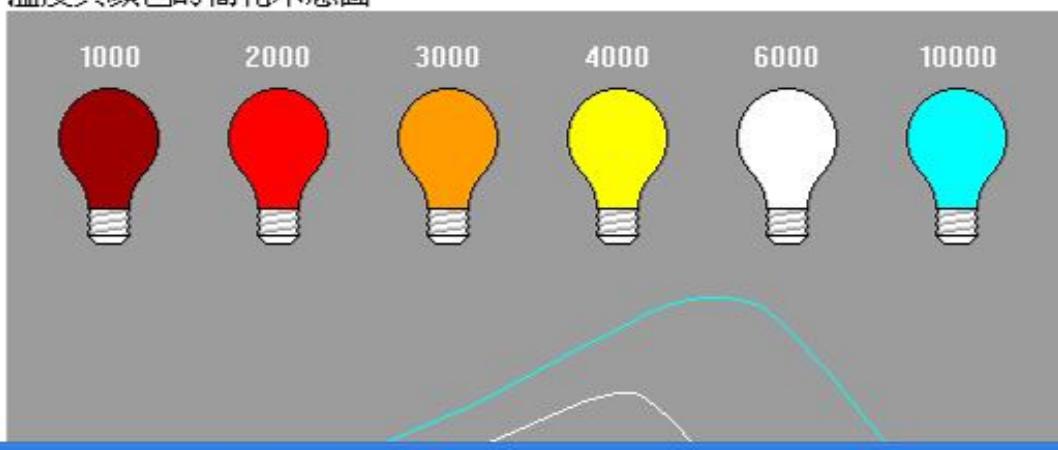


boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/the_birth_of_quanta.html

以下為鐵塊一端加熱後之模擬畫面



溫度與顏色的簡化示意圖



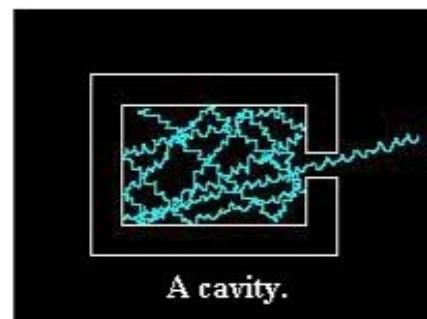


理想化的模型—黑體

一般而言，熱幅射光譜裏的微細結構與熱體的組成物質種類有關，但從實驗知道有一類的熱體則呈現共同的熱幅射光譜形狀，它們被稱作是**黑體**，其表面因對各種波長的光皆吸收而呈現黑色。實作的情況，可以在物體的外表覆蓋一層黑炭灰，即成為黑體。古典熱力學可說明凡是黑體都有相同的輻射能量與頻率關係分佈形式（即光譜），但卻無從說明實驗上量到的形狀為何是那樣（與預測差蠻多的，見後）。

黑體輻射與空腔輻射

另有一個黑體的例子，對於理論探討特別有幫助，即一個理想的空腔。



古典型論

如何看上面的實驗結果？不同頻率（或波長）波段的能量互相交換，所累積多寡不一樣，形成一個分佈，而此分佈的形狀隨溫度改變。

能量均分原理

在平衡的情況下，每個自由度會分到一樣的能量 $1/2 kT$ 。簡諧振子的系統，位能部分會和動能部分會分到一樣多的能量，因此兩個 $1/2 kT$ 合起來就是一個 kT 了。

能量均分原理

在平衡的情況下，每個自由度會分到一樣的能量 $1/2 kT$ 。簡諧振子的系統，位能部分會和動能部分會分到一樣多的能量，因此兩個 $1/2 kT$ 合起來就是一個 kT 了。

每個駐波 mode 會是一個自由度嗎？每個 normal mode 就之一個自由度（ N 個粒子，即 $3N$ 自由度的系統會產生 $3N$ 個 normal mode）。各自獨立的鈍氣原子氣體是如此、雙原子分子構成的氣體是如此（詳見雙原子分子氣體的比熱問題）、全部原子都互相吸引而內聚的液體，或原子間以鍵結固定起來而只剩振動的固體，也都遵守這個能量均分原理。

在此提供一個圖像，試想，用彈簧一個接一個串起來的質量塊，將一塊拉離其平衡位置後立即釋放，問振動會留在那顆被拉以及附近的質量塊？還是會遍及所有的質量塊？答案是，能量會散佈分配到所有可能的模式中。

電腦模擬（自行習作）：以彈簧—質量串列來模擬能量均分現象

延伸議題：[Fermi-Pasta-Ulam](#)

分析並算計駐波模式

將上述觀念用在空腔輻射內的駐波（駐波是空腔內電磁波唯一可持續存在的振動模式），一種可能的駐波就是一個 normal mode，一個獨立的自由度，因此根據能量均分原理，它只能分到一份 $1/2 kT$ 的能量。現在我們有一個可以評估各頻率（波長）釋放多少能量的基礎了，我們只需要分析每種特定頻率能在空腔中建立多少不同的駐波模式，若多，則該頻率分到的能量就多，若少，分到的能量就少。

這樣所分析出來的（不正確的）能量密度分佈為

$$\rho_T(v) dv = \frac{8\pi v^2 kT}{c^3} dv$$

(1) 純幾何

(2) ν 與 EM 能量 ϵ 關係?

根據統計力學，波茲曼分佈描述了力學系統之能量 ϵ 與溫度 T 如何決定該狀態出現的機率 P ：

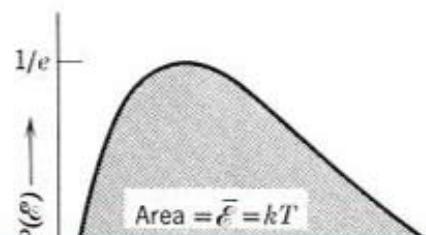
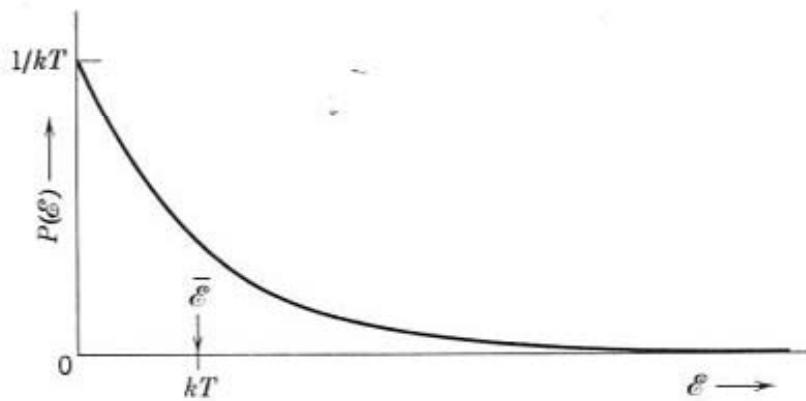
$$P(\mathcal{E}) = \frac{e^{-\epsilon/kT}}{kT}$$

(即事件發生之概率，與該事件總能量及當時整個系統溫度有關)

其中的振子能量 ϵ ，對某頻率電磁波而言（它是一個 SHO，動能得 $1/2$ 、位能得 $1/2$ ，故為 kT 。另外，它是一個橫波，故有兩個自由度），其在溫度 T 時的平均能量是

$$\bar{\epsilon} = kT$$

如下二圖(上：能量分佈的機率密度函數，下：能量乘上能量分佈的機率密度函數，總和起來是平均能量)



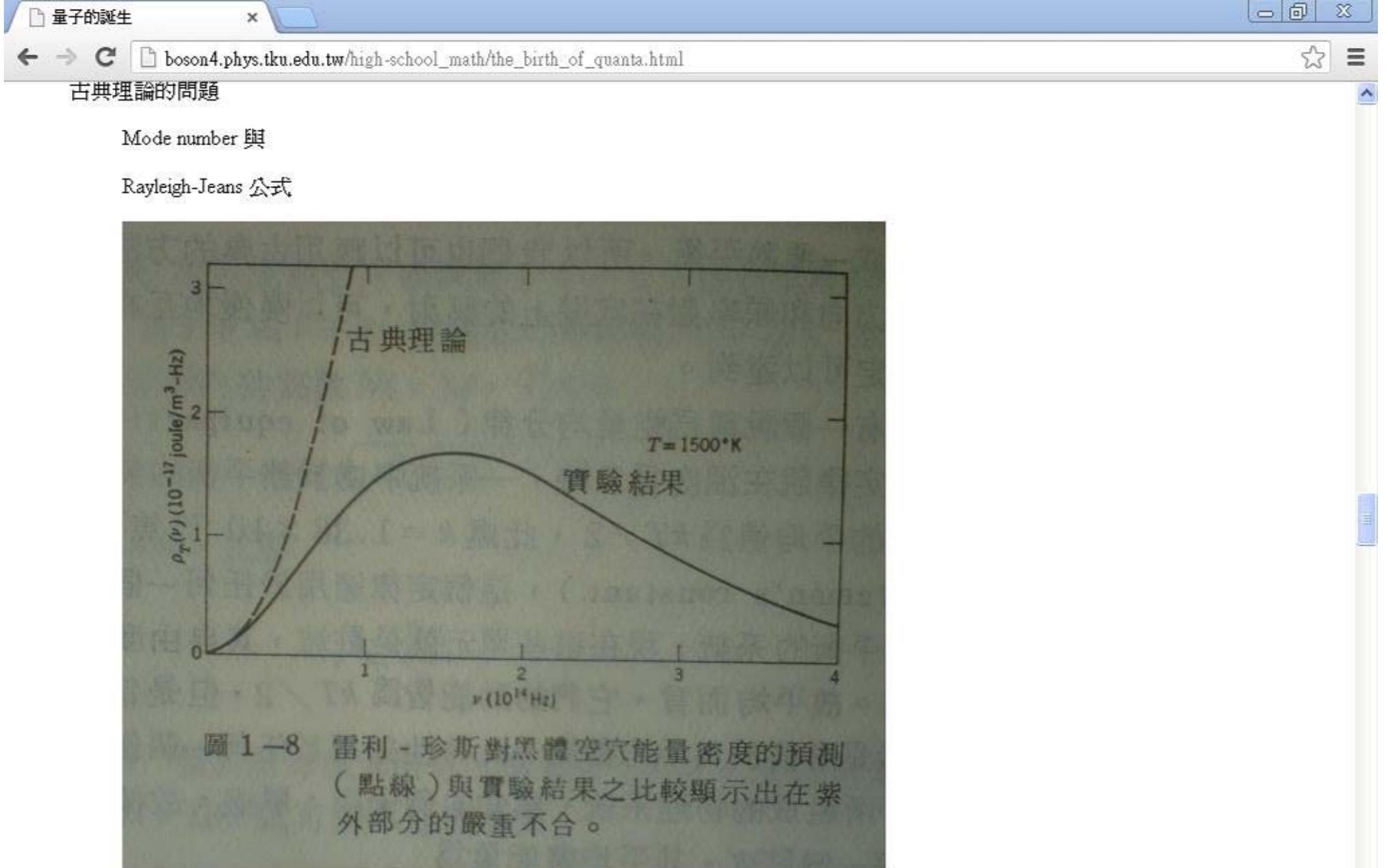


圖 1—8 雷利 - 珍斯對黑體空穴能量密度的預測（點線）與實驗結果之比較顯示出在紫外部分的嚴重不合。

Stefan-Boltzmann law

上圖錯得這樣離譜，但使用的物理又如此基本，想必有重要關鍵被忽略

普朗克的改造

普朗克鑽研黑體幅射的問題多年，想從理論上找一個理論來完全解釋其頻譜與溫度的關係

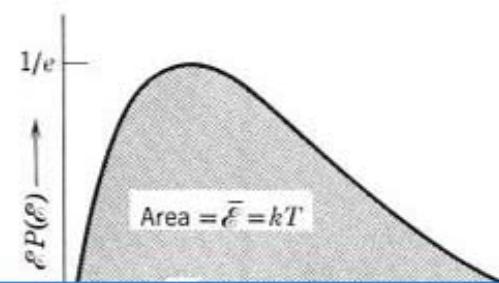
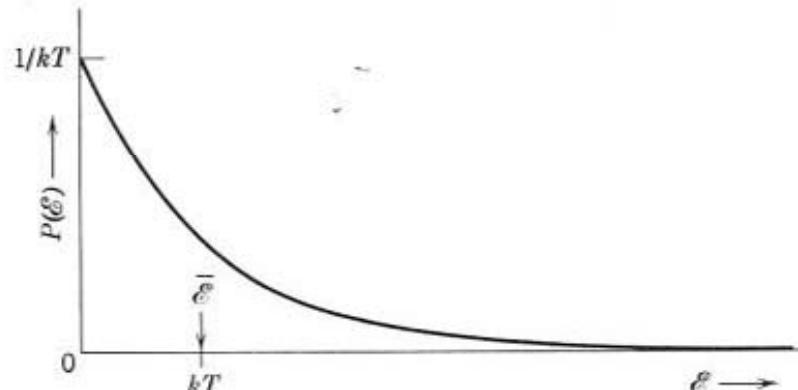
Eisberg & Resnick 量子物理教科書的第二版提到，在 1900 年普朗克提出一個分佈來同時符合 "插值，interpolate" 高頻時的 Wein 公式及低頻時的 Rayleigh-Jeans 公式。（但同一教科書的第三版又選擇不去介紹這些細節。）

亦參見 維基百科 [Planck's law](#)

以下是他著名的（正確的）光譜能量密度公式

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

其想法如下：





C



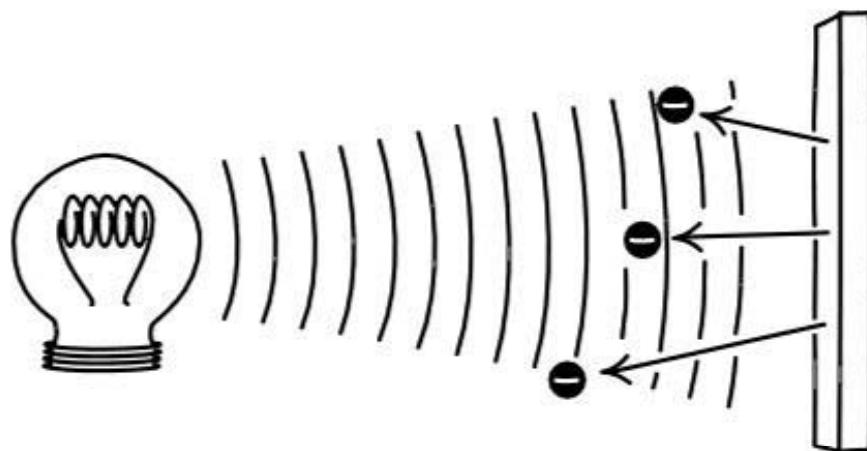
光電效應的實驗

光照射金屬板，在適當的情況會有電子跳出表面，叫作光電子。

有無光電子的逼出，是取決於光照射的顏色（即波長、頻率），而不是它的亮度。

古典理論的不足

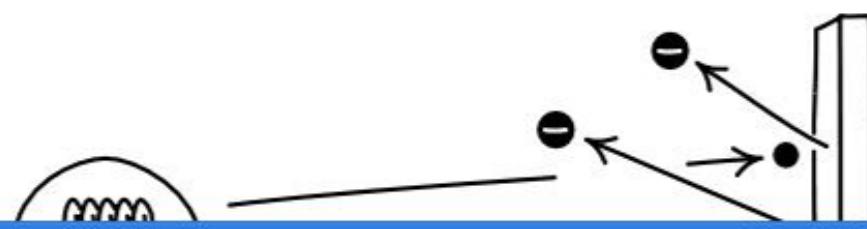
波的能量在振幅而非頻率



愛因斯坦的解釋

愛因斯坦提出光的粒子說 "光子"

而光子的能量是 $E = hv$



原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

原子的結構

原子假說的印證

物質可以無限細分下去嗎？

原子論的復興

道耳吞學說—化合物的固定比例組合

氣體動力論

布朗運動的擴散係數

晶體結構與繞射

原子的模型

拉塞福—核桃而非西瓜

用 alpha 粒子打金箔，竟然有大角度反射，甚至 180 度。

拉塞福回憶說，那時的感覺，就像拿砲彈把一張紙，而看到砲彈被彈回那般令人驚訝。

一個操場的中間有一個顆棒球，這就是大致的原子與原子核比例大小。

卡文迪西實驗室的吉祥物—鱷魚，的典故

原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

波爾模型與原子光譜

光譜儀分光

不目的物質燃燒會有不同的顏色，這就是煙火能有各式各樣不同之光色的原因

利用光柵分光可以把可見光範圍的電磁波作解析度很高的分光，

s, p, d, f 的命名

Sharp, principle, diffuse, fundamental

Balmer 與氫原子光譜

光譜儀分解出複雜的氫原子光譜。

瑞典中學教師 Balmer 用藝術般的方式把頻率擬合到精準的公式規則上

$$v = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

其中 R' 來自光譜本身。他甚至認為這是另一個更一般性公式

$$v = R' \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

的特殊情況。

$$E = E_i - E_f = R_E \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

這個公式懸而未解 30 年。

原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

波爾模型 (1913)

系統有能階，電子在能階間跳躍。

$$E^3 = R\omega^2 \text{ (束縛能的古典公式)}$$
$$E = n\alpha h \omega \text{ (電子必須遵從的額外指令)}$$
$$E_1 - E_2 = h\nu$$

前兩式合併消除 角頻率 ω ，得

$$E = R / (\alpha^2 h^2 n^2)$$

再將上式束縛能寫成 E_1 、 E_2 並相減，得

$$\hbar\nu = R / (\alpha^2 h^2) (1/n_1^2 - 1/n_2^2)$$

最後得 (用了對應性論述，要求 α 必需是 $1/2$)

$$\nu = 4R / h^3 (1/n_1^2 - 1/n_2^2)$$

波爾之後經常使用同一個物理量的古典與量子定義來推的等同演公式，最終發展成 "對應性原理 (correspondence principle)"，並為海森堡的量子力學版本奠下基石。

註

後來的故事：要求電子軌道的角動量必須是量子化的，也可以想成是要求波的振幅繞了一圈要接回來。由於波振盪一週期要通過零兩次，因此只能有無節點、兩節點、四節點 … 的情況。

原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

放射性

無意中發現的放射性

居禮從被感光的底片中它間發現放射性元素的存在，

放射性與元素蛻變

元素竟然會轉變成另一種元素（豈不是煉金術實現嗎？可惜並不容易）

粒子射線

alpha (氦原子核), beta (電子), gamma (光子)

荷質比（利用行進中之電荷會受磁場偏轉，即勞倫茲力）、密利根油滴實驗

原子核

質子與中子

統稱核粒子，由三個夸克構成

夸克有 up (+2/3) 與 down (-1/3)，及在加速器中看到的高能量的 top 與 bottom，以及 charm 與 strange

質子由 u u d 構成帶電 +1，中子由 u d d 構成，中性不帶電 ($2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$)

原子核的分裂

連鎖反應

原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

原子核的分裂

連鎖反應

$\text{鈾}^{235} + n \rightarrow \text{Kr} + \text{Ba} + (2,3) n$

臨界質量

核能發電

- 輕水、重水式
- 滋生式 (Breeder)

雲霧室

利用過飽和氣體受擾動會有液體凝結（如噴射機雲），把粒子的軌跡記錄下來

基本粒子

重子 (baryon)、輕子 (lepton)、介子 (meson)

原子的結構
boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

基本作用力

弱作用、強作用力、電磁力、重力

弱電統合

強、弱電統合

重力的困難

超弦理論與十一維空間

恆星的一生

恆星的演化與死亡（重力扮演很重要的角色）
http://phys.ncku.edu.tw/~astrolab/e_book/stellar_evolut/stellar_evolut.html

元素的誕生

最早宇宙氣體只有氫氣，隨著恆星的演化，不同種類的元素一步步被合成。

宇宙大霹靂

紅位移

二十世紀初期時發現，越遠恆星之光譜線其紅位移（即向能量低的一邊偏移，紅、藍是人類主觀說法）越大

原子的結構

boson4.phys.tku.edu.tw/high-school_math/structure_of_atom.html

元素的誕生

最早宇宙氣體只有氫氣，隨著恆星的演化，不同種類的元素一步步被合成。

宇宙大霹靂

紅位移

二十世紀初期時發現，越遠恆星之光譜線其紅位移（即向能量低的一邊偏移，紅、藍是人類主觀說法）越大
如何知道恆星的遠近？

三角視差，地球有自轉與公轉，故離地球遠近不同的物體在觀察者的視線角度並不相同（相像坐火車行駛時看到的窗外景物）

光譜分光測定其絕對亮度（星等）與看起來的亮度（視星等）

背景輻射

4K

膨脹中的宇宙