

## 落體的運動

### 一、電腦模擬實驗：自由落體問題

問題：想知道炮彈打到那裏

物理量：軌跡隨時間的變化  $x(t)$ ,  $y(t)$

物理定律（數學模型）： $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$ ，在此  $\mathbf{f}$  純粹來自於重力（**粗體字**代表是向量）

粒子在地表附近所受的重力是  $g$  ( $g = GmM/R$ )， $g = 9.8$  牛頓/米

$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m(a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y)$ ，其中  $a_x = dv_x/dt$ 、 $a_y = dv_y/dt$

只有重力時， $\mathbf{f} = f_y \mathbf{e}_y = g m \mathbf{e}_y$ ，也就是說  $f_y = g m$

演算法：

利用 [Euler 演算法](#)：

位置  $x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t$ ； $y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t$

速度  $v_{x,n+1} = v_{x,n} + a_{x,n} \Delta t$ ； $v_{y,n+1} = v_{y,n} + a_{y,n} \Delta t$

進階補充：對計算穩定性及精確度，有更好的選擇

Euler-Richarson 演算法，先求出

$$a_{x,n} = f_x(r_n, v_n, t)/m$$

$$v_{x,\text{mid}} = v_{x,n} + (1/2) a_{x,n} \Delta t$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + (1/2) v_{x,\text{mid}} \Delta t$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + a_{x,\text{mid}}\Delta t$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,\text{mid}}\Delta t$$

註：為什麼 Euler-Richarson 演算法比 Euler 的好，可參考 Gould 課本上的推導：[p1](#)、[p2](#)

程式流程：

- (0) 開始，宣告變數
- (1) 問質量、初速度（含初速率與角度）
- (2) 建立位置  $x$  與  $y$ 、速度  $v_x$  與  $v_y$  的初始值
- (3) 用演算法求下一個小時段  $\Delta t$  後的位置與速度
- (4) 畫出粒子位置並檢查高度是否已達地面，未達地面則回到 (3)
- (5) 問要不要再射一次，若要則回到 (1)
- (6) 結束

你等不及了嗎？先偷玩一下老師已經做好的可執行檔 [cannon.x](#)

你做不出來嗎？先偷看一下老師已經寫好的範圍程式 [cannon.f](#) [cannon.f.txt](#)

（非不得已請勿先看）

動動腦、動動手，自己再改造（或回家做）：

1. 畫個大砲把炮管的角度表現出來
2. 以少蘇句裝指數表現炮彈動能，轉換成初速率

## 二、電腦模擬實驗：受空氣阻力的落體

問題：在有空氣阻力的情況下，炮彈軌跡變得如何？

物理量：一樣是軌跡隨時間的變化  $x(t)$ ,  $y(t)$

物理定律（數學模型）： $f = m a$ ，受力  $f$  同時包含了重力及空氣阻力

空氣阻力非常複雜（因此飛機或高速火車的阻力設計需要靠風洞實驗或電腦模擬來進行），基本上它是與速率有關，速率越高阻力越大，靜止的物體則沒有空氣阻力。可見它是一個與速率有關的量，常見的簡化公式，有隨速率一次方呈正比的，也有隨兩次方呈正比的，方向是速度反向（負號）的

$$F_d = -k_1 v$$

$$F_d' = -k_2 v^2$$

由於有  $x$  與  $y$  兩個分量，假設速度與水平線的夾角為  $\theta$ ，即  $\theta = \tan^{-1}(v_y/v_x)$  [ Fortran 程式寫成 `theta = atan(vy/vx)` ]，

$$F_{d,x} = F_d \cos\theta$$

$$F_{d,y} = F_d \sin\theta$$

（或者是，直接用  $v_x/\sqrt{v_x^2+v_y^2}$  及  $v_y/\sqrt{v_x^2+v_y^2}$  會比先求  $\theta = \text{atan}(v_x/v_y)$  取角度才去求  $\cos(\theta)$  及  $\sin(\theta)$  更好）

因此，在有關力之部分的公式，

$$f_x = F_d \cos\theta$$

$$f_y = -m g + F_d \sin\theta$$

其他的部分，與上一個議題相同

新議題：如何求得空氣阻力係數  $k$ ？

利用終端速度，即垂直落下過程中重力與阻力達平衡，使合力為零不再加速，而呈等速運動時的速度。

因此，在有關力之部分的公式，

$$f_x = F_d \cos\theta$$

$$f_y = -m g + F_d \sin\theta$$

其他的部分，與上一個議題相同

新議題：如何求得室氣阻力係數  $k$ ？

利用終端速度，即垂直落下過程中重力與阻力達平衡，使合力為零不再加速，而呈等速運動時的速度。

$$\text{合力} = 0 = -m g + F_d = -m g + k_1 v_y^2$$

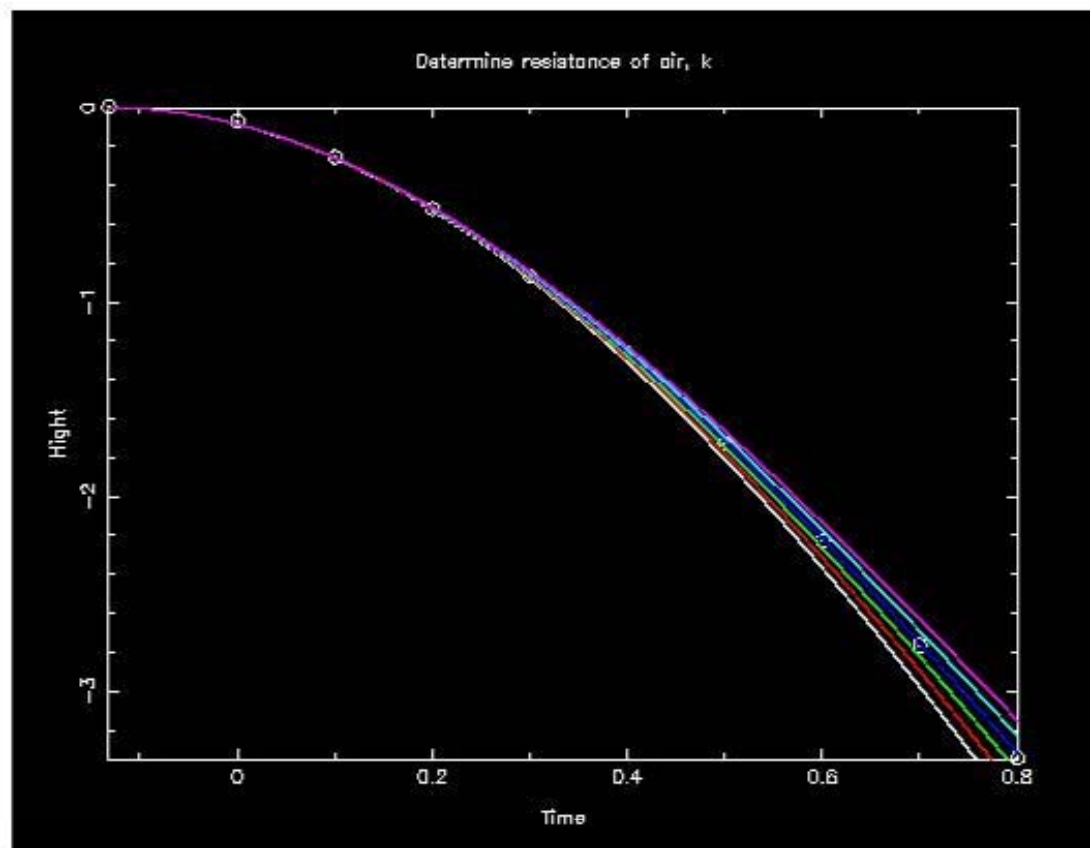
即  $k_1 = v_y^2 / (m g)$ ，此終端速度可藉由實驗量得

一個粉筆頭大小的石子其終端速度大約是每秒三十公尺。另外，一個重 0.254 克、半徑 2.54 公分的保利龍球有以下的實測數據（引用 Physics Teacher 24, 153 (1986)）

時刻（秒）	位置（公尺）
-0.132	0.0
0.0	0.075
0.1	0.260
0.2	0.525
0.3	0.870
0.4	1.27
0.5	1.73
0.6	2.23
0.7	2.77
0.8	3.35

想想看，我們要怎麼從上列的數據求得空氣阻力係數  $k$ ？

(儘量自己想，不會再參考)



演算法：

同樣採用 Euler 或 Euler-Richardson 演算法

程式設計：

與上一個議題相同

參考範例程式

[cannon\\_drift.f](#) [cannon\\_drift.f.txt](#) [cannon\\_drift.x](#)