向量空間（解析幾何與向量的關係）

向量：高中數學的定義？

維度？

線性獨立

有 N 個向量，若任何一個都不能夠透過其他的向量線性組合而成，則這 N 個向講線性獨立。

線性相依

無法構成線性獨立時稱之

向量：大學物理學的定義

座標轉換（詳見下次上課內容：幾何 II）

向量空間：

該空間中有乘與加兩種操作。係數乘上基底向量是基本單元。向量是可以加減的，而係數（純量）則乘在向量上，要滿足一些規律，並構成封閉系統。

（維基百科：http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space、MathWorld：http://mathworld.wolfram.com/VectorSpace.html）
（定義裏剛好也有談到 體(filed) 的，詳見 http://mathworld.wolfram.com/FieldAxioms.html）

向量間的內積與外積

（定義裏剛好也有談到 體(filed) 的，詳見 http://mathworld.wolfram.com/FieldAxioms.html ）

向量間的內積與外積

向量的內積

我們爲什麼想要知道向量的內積：(1) 想知道向量的長度 (2) 想知道向量的分量

（幾何意義是：任一向量在另一向量上的投影大小，兩種作法的結果是一樣的。）（爲什麼？）

向量的外積

我們爲什麼想要知道向量的外積：電磁交互作用的勞倫玆力、描述轉動（但小心轉動本身不是向量、轉速才是，因此角動量仍是向量）。

（幾何意義是：兩向量撐開之面積大小、方向是撐開面之法方向。）（在三度空間就是體積嗎？不是，向量三重積，即 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 才是三個向量撐開來的平行六面體體積）

外積之大小等於張開之平行四邊形面積一事，是可以透過 "移一塊補一塊" 的策略證明，請大家自行試試看。

更高維度的情形：n 個向量在 n 維空間張開來的體積，是該 n 個向量將各自分量排成矩陣後的行列式值。至於 $n\times n$ 矩陣的行列式值怎麼算，是有公式及規律性的。

作業：二維向量兩個求外積，試與其分量形式所組成的行列式值作比較。

延伸知識：函數空間

（下次上課介紹）

物件

三度空間的物件：點、線、面、體

直線

如何寫下一條直線的方程式？

多問一句：如何寫下一個平面的方程式？

曲線

合宜的參數表示法

一條曲線是可以用參數來表示的，只要這個參數滿足一些基本的、不太離譜怪異的要求。

曲線的範例：

點集合 (x_1, x_2) 的一般形式用極座標表示

$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$

阿基米德螺線

依上面定義的 (x_1, x_2)，其中

$r = a\,\theta$, $(a \neq 0)$

曲線自身的參考座標

空間彎曲與否，是不是非得要跑到更高維度才看得出來？住在低維度空間的生物有什麼線索可用？（答案：非歐幾何時，歐氏幾何已建立的公設是不能用了。如三角形內角和大於 180 度）

事實上，即便二維都是很勉強的，因爲那些生物都不可能有消化道（想像一下）。

有同學問，是否零維與一維就不知道或沒有所謂的空間彎曲？答案是的確如此：得知空間彎曲需要曲率作爲資訊，因此至少要有兩個維度，一個是切線方向，另一個是垂直於切線方向。另一考慮的角度，測度張量的定義 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$， 因此至少需兩個線性獨立的向量作基底才有最起碼的測度張量。這呼應我們前面講過的，一維生物不需要畢氏定理。

弧長作爲曲線的自然參數

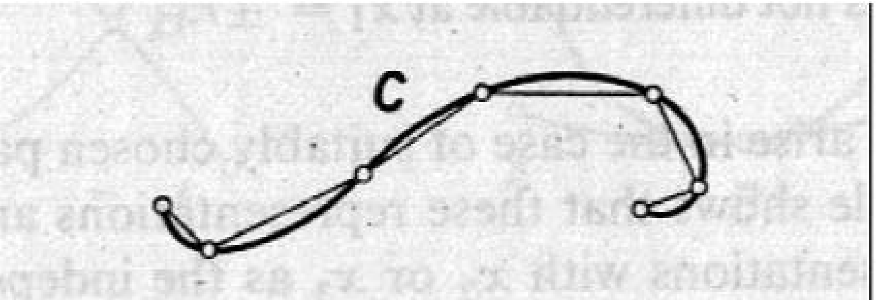


Fig. 9.1. Arc of a curve and polygon of chords

弧長的觀念，可以從多邊線段的長度來思考。上圖每一直線段都可由畢氏定理明確得出（因爲我們知道那些點的 x 及 y 座標），故可加得總長。如果切分越來越細，而總長趨於某一定值極限。

$$l = \int^{b} \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}\, dt$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}\, dt$$

這個 l 可以被證明將與選取參數表示法無關。（但這個 l 真的是我們所認知的弧長這種東西嗎？怎麼看出來？關鍵在 dx = x-dot dt）

弧長本身可以依其長度發展的變化而拿來當作一個表示曲線的參數，它與原參數之間的關係只要仿照上式定義來定成以下的形式即可：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}\, d\tilde{t}$$

利用這個定義，可證明（在此不列），弧長本身滿足作爲曲線之參數表示法的規定要求，它的確是可以拿來作爲描述曲線的參數。

這個 s 真的之具有

symbolically $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$

根據畢氏定理（二維的連套用兩次），可以確認 s 真的具有弧長的意義

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$$

範例：圓螺旋線

Example 9.1 (Circular helix). From (7.4) we obtain

這裏既然提出了弧長可做爲參數使用了，則座標對參數之微分就有對特別的 s 及一般的 t 了，以下用 prime 及 dot 在符號上區分它們的不同：

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

斜率、曲率、扭率

切線方向（斜率）

曲線進展的方向是

$$\frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h}$$

上式有沒有除以 h 都沒有關係的。

取極限的情況，可得單位切（線）向量

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)}{h}$$

如果換從在參數 t 的表象（表示法）裏，則有

$$\mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}}t' = \dot{\mathbf{x}}/\dot{s}$$

利用以下性質（由 s(t) 的定義可看出）

曲率

切線方向如果一直不變，就是一條直線（相對於其所在的空間而言）。

如果切線單位向量隨著參數而改變，必定產生彎曲

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$$

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{x}''(s)| = \sqrt{(\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{x}''(s))}$$

可定義 曲率半徑

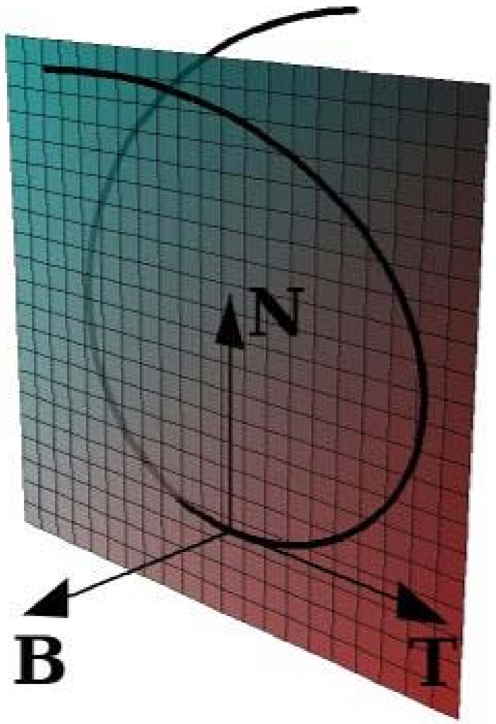
$$\rho(s) = 1/\kappa(s)$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{[(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2]}}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{3/2}}$$

$$\mathbf{p}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}$$

扭率

曲率測度曲線偏離切線方向直行的程度，而扭率則測度偏離密切面（osculating plane，即 t 與 p 構成的面）的程度



我們可以看出

$$\mathbf{b}' = \alpha \mathbf{p}$$

定寫如下

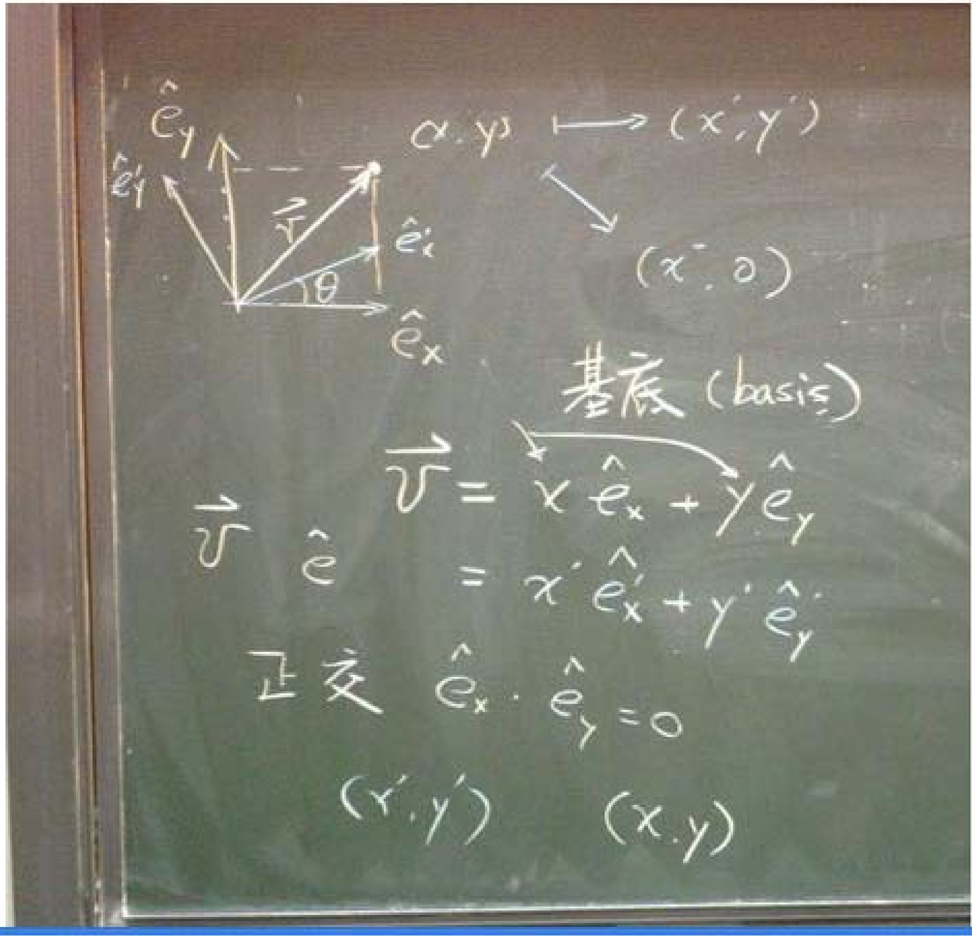
$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p}$$

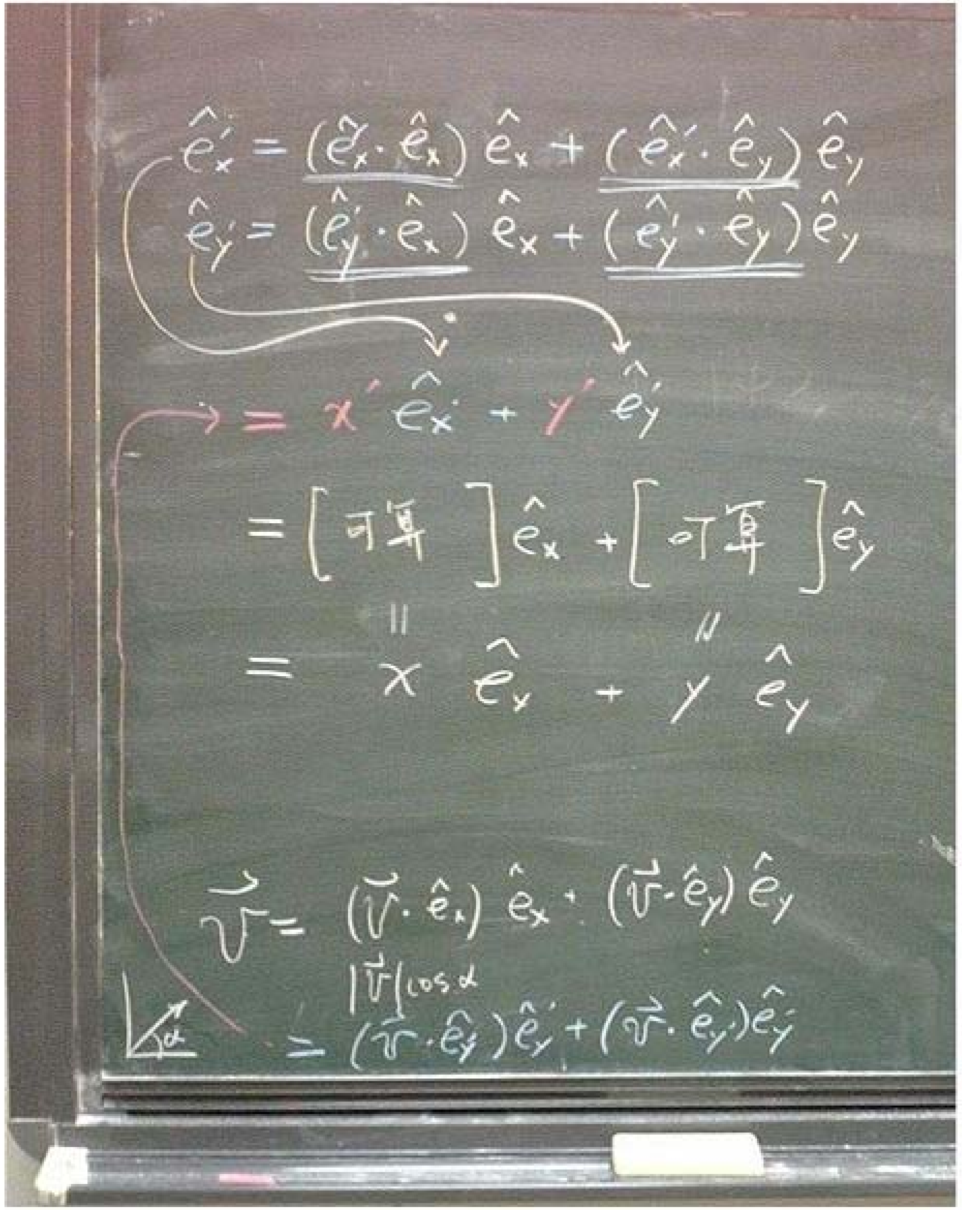
向量、座標與基底

幾何學從形狀的學問，透過解析幾何的建立，以座標（向量的分量）來描述空間中的點、線、面、體，賦與了這些物件上函數的意義。

然而，分量所呈現的值，會因為座標軸（基底向量）取法的得不同而有不同。能取到一個比較好的基底向量來做座標軸，對問題、方程式的簡化是很有幫助的。舉個例子說，橢圓方程式在取了長、短軸作為座標軸之後，形式就變得簡化很多。

座標轉動與基底變換



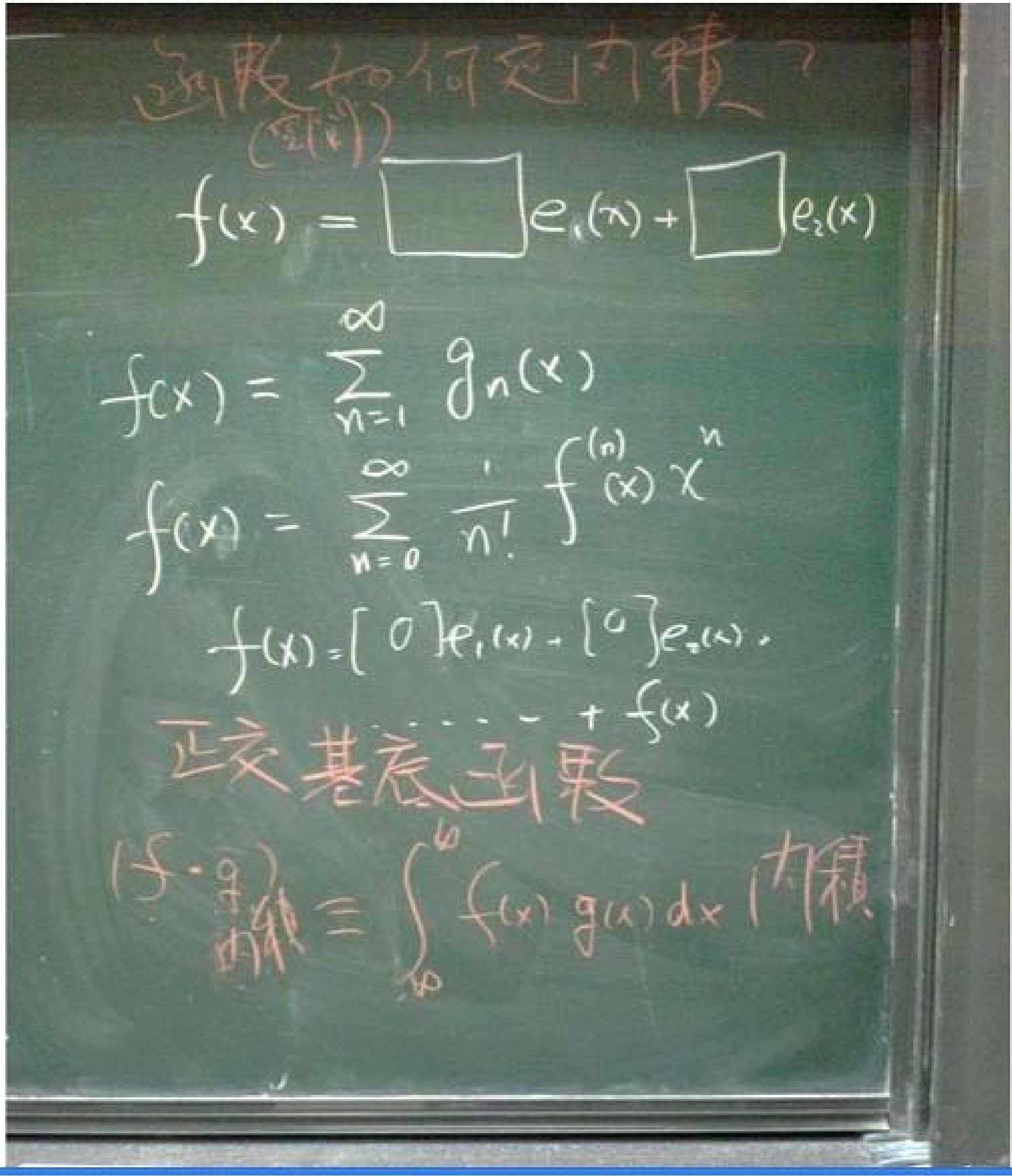


回家作業：已知座標轉動了 alpha 角，則新座標分量 (x', y') 要怎樣利用舊座標分量 (x, y) 來表示？

函數空間

基底函數與其正交性、完備性

函數能不能像向量那樣以基底（基底函數）來展開？



函數空間裏的內積

(1) 定義與範例

見內積的一般性定義

(2) 投影與分量

投影本身就是一個非常幾何的名詞

以三角函數作爲基底

富利葉 (Fourier) 級數

先看下列的性質：

The computation of the (usual) Fourier series is based on the integral identities

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\sin(n\,x)\,d\,x = \pi\delta_{m\,n} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\cos(n\,x)\,d\,x = \pi\delta_{m\,n} \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\cos(n\,x)\,d\,x = 0 \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,d\,x = 0 \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,d\,x = 0 \tag{5}$$

for $m,\ n \neq 0$, where $\delta_{m\,n}$ is the Kronecker delta.

（以上這些積分如果不會做，也可以寫個程式來計算驗證。）

對於任何週期性函數，都可以用些正弦與餘弦函數展開，如下：

Using the method for a generalized Fourier series, the usual Fourier series involving sines and cosines is obtained by taking $f_1(x) = \cos x$ and $f_2(x) = \sin x$. Since these functions form a complete orthogonal system over $[-\pi, \pi]$, the Fourier series of a function $f(x)$ is given by

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x), \tag{6}$$

where

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d x \tag{7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n x)\, d x \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x)\, d x \tag{9}$$

and $n = 1, 2, 3, \ldots$. Note that the coefficient of the constant term a_0 has been written in a special form compared to the general form for a generalized Fourier series in order to preserve symmetry with the definitions of a_n and b_n.

如果定義域是長度而不是角度

For a function $f(x)$ periodic on an interval $[-L, L]$ instead of $[-\pi, \pi]$, a simple change of variables can be used to transform the interval of integration from $[-\pi, \pi]$ to $[-L, L]$. Let

$$x \equiv \frac{\pi x'}{L} \tag{11}$$

$$d x = \frac{\pi\, d x'}{L}. \tag{12}$$

Solving for x' gives $x' = L x / \pi$, and plugging this in gives

基本技巧 sin(x)sin(y) 怎麼積分

積化和差

積化和差公式

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

捲積 (convolution)

http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

http://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html

富利葉轉換

非週期性函數，有富利葉轉換 f(x) -> F(k) 。

如何看出富利葉轉換是一種基底展開？積分就相當於加總。以 e^{ikx} 作為基底展開原函數。

繞射與晶體結構

原子的假說（原子論的復興）

原子論的復興