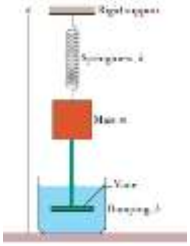
『北區高中物理科學人才培育』計畫高二物理期末考試卷

1. 試證一 astronomical object 自轉的週期不可能短於 T = (3 π /G ρ)$^{1/2}$ 。(10%)

解答： $\frac{GM}{R^2}=\frac{v^2}{R}$ ，$M = (4\pi/3)\,\rho R^3$ ， $v = 2\pi R/T$

$$\frac{4\pi}{3}G\rho R=\frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow T=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

2. 

(a)左圖之振子受到彈簧回復力以及葉片阻滯力的作用，若彈簧之力常數 $=k$，葉片之阻滯係數 $=b$，請問此振子受到之總力為何？(5%)

(b)請問此振子之機械能為何？(10%)

(c) 請問何以未考慮重力何？(5%)

解答： (a) $\sum F=-kx-bv$

(b) $x(t)=x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t+\phi)$

$E=\frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow E(t)=\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$

(c) 重力只改變振子的平衡位置 $(m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=kh)$

3. 試求在 Maxwell's speed distribution $P(v)=4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}v^2 e^{-Mv^2/2RT}$ 下之

(a) 平均速率，(b) 方均根速率，(c)最可能的速率。(10% each)
(如有需要，可用下列二積分公式)

$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx=\frac{n!}{2a^{n+1}}\quad (a>0)$ $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

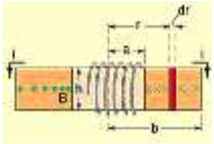
解答：

(a) $\bar{v}=\int_0^\infty vP(v)dv=\sqrt{8RT/\pi m},\ n=1,\ a=(M/2RT)$

(b) $\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2P(v)dv=3RT/M$, by integration or from $p=nMv_{rms}^2/3V,\ v_{rms}=\sqrt{3RT/M}$

(c) $dP/dv=0\Rightarrow v_P=\sqrt{2RT/M}$

4.



(a) 上圖左之螺線環有 N 匝，其內之電流 $=i$，試求其磁場。(10%)

$$B(2\pi r)=\mu_0 iN \quad B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

(b)若此螺線環之截面如上圖右，其內外徑分別為 a 及 b，試求其電感。(10%)

$$B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r},\ \Phi=\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi=\int_a^b Bhdr=\int_a^b \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}hdr$$

$$=\frac{\mu_0 iNh}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 iNh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L=\frac{N\Phi}{i}=\frac{N}{i}\frac{\mu_0 iNh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

5.

(a) 試求左圖均勻帶電圓環(半徑 R 電量 q)軸線上距環面 z 處之 電場(z << R)。(10%)

(b)若有一電子被限制在此環之軸線上運動，試證其所受靜電力將使其對環面作一角頻率為 $\omega=\sqrt{\frac{eq}{4e_0 mR^3}}$ 之振盪。(10%)

解答： (a)

$$dq=\lambda ds$$

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2}$$

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{(z^2+R^2)}$$

$$dE\rightarrow dE\cos\theta,\ \cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$dE\cos\theta=\frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}ds$$

$$E=\int dE\cos\theta=\frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}ds$$

$$=\frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(b) $$F=-\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\rightarrow-\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\rightarrow k=\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eq}{4\square\varepsilon_0 mR^3}}$$