高中人才培育計畫 --- 一年級數學期末考模擬（每題10分）

1. 下列式子中 $i=\sqrt{-1}$ ：

   (a) 試求 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2718}$ 之值；

   (b) 試將 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ 寫成點斜式（polar form） $z=r\,e^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 。

   N.B. 設若角度以弧度表示，則 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ， $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

2. 複數 $z=x+iy$ 的絕對值為 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以 $|z|$ 及 $|z-2|$ 分別為在複數平面上點 (x,y) 到原點 $(0,0)$ 及 $(2,0)$ 的距離。試證 $|z|+|z-2|=4$ 蘊含 x 與 y 滿足橢圓方程式 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 。

3. 設若 $f(x)=x\,e^{2x}-x^2$ ，試求 $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ 及 $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ 。

4. 設若 $y(t)=t^2e^t$ ， $x(t)=\sin(2t)$ ，求 y 對 x 微分之導函數 $\frac{dy}{dx}$ ，並以 t 表示之。

5. 設若 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分別為 x 、 y 及 z 軸方向上的單位向量，且 $\vec{A}=(3,-\sqrt{2},-1)=3\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}-\vec{k}$ ， $\vec{B}=(c,\sqrt{2},-3)=c\,\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-3\vec{k}$ ， c 為一常數。

   (a) 求向量 $\vec{A}$ 之長度；

   (b) 設若向量 $\vec{B}$ 垂直於向量 $\vec{A}$ ，求 c 之值。

6. 向量 $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}$ 與 $\vec{B}=2\vec{j}+\vec{k}$ 為頂點在 $(0,0,0)$ ， $(1,2,0)$ ， $(0,2,1)$ 之三角形的兩邊，試以向量積求此三角形的面積。

7. 設若矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ，求 A 及 B 之反矩陣。

8. 試以部份積分法求不定積分 $\int x\ln x\,dx$ 之結果。

9. 求定積分 $\int_{-1}^{3}|x-1|\,dx$ 及 $\int_{-3}^{3}(x^5+x^9)\,dx$ 之值。

高中人才培育計畫 --- 一年級數學期末考模擬（每題10分）

10. 聯立方程式 $x+y+2z=1$ ， $2x+4y-3z=5$ 與 $3x+6y-5z=2$ 可改寫為 $AX=B$ ，

其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}$ ， $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$ 。設若已知 A 的反矩陣為

$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -17 & 11\\ -1 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$ ，試求解 x ， y 與 z 之值。

<u>附加幾個有用資訊</u>：

(i) 設若 $\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y$ 及 $\vec{e}_z$ 分別為 x 、 y 及 z 軸方向上的單位向量，且向量 $\vec{A}=a_1\vec{e}_x+a_2\vec{e}_y+a_3\vec{e}_z$ 、 $\vec{B}=b_1\vec{e}_x+b_2\vec{e}_y+b_3\vec{e}_z$ 及 $\vec{C}=c_1\vec{e}_x+c_2\vec{e}_y+c_3\vec{e}_z$ ，則

$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 、 $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ 及 $(\vec{A}\times B)\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ 。

(ii) 矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 之行列式為 $det(A)=|A|=ad-bc$

(iii)矩陣 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ 之行列式為 $|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$ 或

$|A|=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$ 等。