

# 幾何 (I)

純的數學、實驗的數學

想像力發揮、心中的小宇宙、模型

形狀、比例與相似性

從設計圖到完成品，形狀的相似性

繪製地圖

Geo 希臘文原意是土地、測量。“幾何”是徐光啓、利瑪竇翻譯。

希臘的幾何成就

畢達哥拉斯定理：

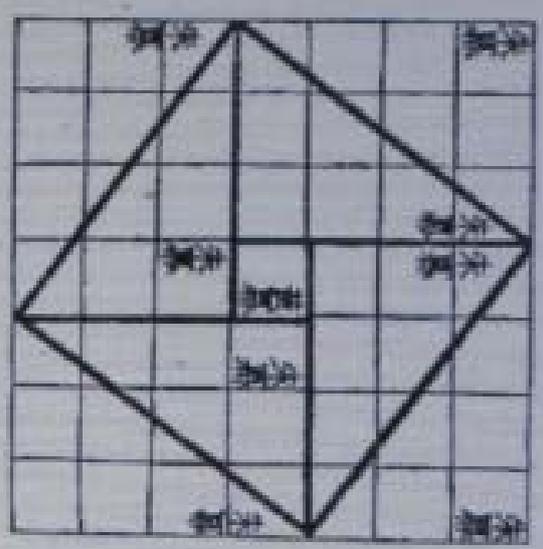
古中國叫“勾股弦定理”

勾股弦



### 古中國叫“勾股弦定理”

勾股學舍以故姓寧



古書中甚至講述大禹因此治水成功，換用現代的語言，是應用數學原理成就精密的工程的大型工程。

證明的方法很多，（但不能用三角函數的正餘弦定理  $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$  和  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ，這是因為這個三角函數的定理本身就是由畢氏定理證明出來的），以下介紹一個比之圖像化的證明。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

△





(圖片出處：維基百科)

<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/勾股定理>

我們怎樣看畢氏定理？

多相度空間中長度的本質。即，長度與其投影在低維度真的長度，它們之間有一定的關係。

誰不需要畢氏定理？

生存在一維空間中之智慧形式。

歐基里德：公設與證明

## 歐基里德：公設與證明

古希臘數學家歐基里德的《幾何原本》提出了五條公設。頭四條公設分別為：

1. 由任意一點到任意一點可作直線。
2. 一條有限直線可以繼續延長。
3. 以任意點為心及任意的距離可以畫圓。
4. 凡直角都相等。

第五條公設說：同一平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角的和小於兩直角，則這兩直線終無限延長後在這一側相交。

## 是直尺與圓規的幾何

### 奧依勒的多面體公式

$$v + f - e = 2$$

其中  $v$ 、 $f$ 、 $e$  各代表“頂點 (vertex)”、“面 (face)”、“邊 (edge)”的數目。

<https://140.128.93.186/~clenks/MO11>

### 如何理解

#### 雕刻家的觀點

思考三角錐頂點、四角錐頂點、...、 $n$  角錐頂點，在數去一角 ( $v' = v - 1$ ) 來增加了一個面 ( $f' = f + 1$ ) 時的結果：同時也增加了  $n$  個邊 ( $e' = e + n$ )

## 光學與幾何

為什麼近的東西看起來比較大？

視線從眼中射出？

反射與折射

面鏡與透鏡

大一物理中的幾何光學

[http://163.13.111.54/general\\_physics/week\\_08\\_day\\_1\\_geometrical\\_optics.html](http://163.13.111.54/general_physics/week_08_day_1_geometrical_optics.html)

## 解析幾何

座標

結合了函數與幾何，空間中的直線、曲線，都是函數或滿足某方程式的解。

向量空間（解析幾何與向量的關係）

向量空間 (解析幾何與向量的關係)

向量：高中數學的定義

線性獨立

有  $N$  個向量，若任何一個都不能夠透過其他的向量線性組合而成，則這  $N$  個向量線性獨立。

線性相依

向量：大學物理學的定義

座標轉換 (詳見下次上課內容：幾何 II)

向量空間：

該空間中有乘與加兩種操作。係數乘上基底向量是基本單元。向量是可以加減的，而係數 (純量) 則率在向量上，要滿足一些規律，並構成封閉系統。

(維基百科：[https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space)，MathWorld：<http://mathworld.wolfram.com/VectorSpace.html>)  
(定義萬剛好也有談到體(ined)的，詳見<https://mathworld.wolfram.com/FieldAxioms.html>)

向量空間的內積與外積

(維基百科：[http://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_space](http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space)、MathWorld：<http://mathworld.wolfram.com/VectorSpace.html>)  
(定義裏剛好也有談到體(tiled)的，詳見 <http://mathworld.wolfram.com/FieldAxioms.html>)

## 向量間的內積與外積

### 向量的內積

我們為什麼要知道向量的內積：(1) 想知道向量的長度 (2) 想知道向量的分量

(幾何意義是：任一向量在另一向量上的投影大小，兩種作法的結果是一樣的。) (為什麼?)

### 向量的外積

我們為什麼要知道向量的外積：電磁交互作用的勞倫茲力、描述轉動 (但小心轉動本身不是向量、轉速才是，因此角動量仍是向量)。

(幾何意義是：兩向量撐開之面積大小、方向是撐開面之法方向。) (在三度空間就是體積嗎?)

## 延伸知識：函數空間

(下次上課介紹)