

李明憲的個人資料 - 漢江大 X 量子的誕生

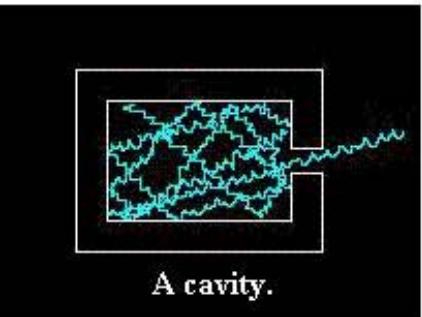
163.13.111.54/high-school_math/the_birth_of_quanta.html

理想化的模型—黑體

一般而言，熱幅射光譜裏的微細結構與熱體的組成物質種類有關，但從實驗知道有一類的熱體則呈現共同的熱幅射光譜形狀，它們被稱作是**黑體**，其表面因對各種波長的光皆吸收而呈現黑色。實作的情況，可以在物體的外表覆蓋一層黑炭灰，即成為黑體。古典熱力學可說明凡是黑體都有相同的輻射能量與頻率關係分佈形式（即光譜），但卻無從說明實驗上量到的形狀為何是那樣（與預測差蠻多的，見後）。

黑體輻射與空腔輻射

另有一個黑體的例子，對於理論探討特別有幫助，即一個理想的空腔。



A cavity.

古典理論

如何看上面的實驗結果？不同頻率（或波長）波段的能量互相交換，所累積多寡不一樣，形式一個分佈，而此分佈的形狀隨溫度改變。

能量均分原理

在平衡的情況下，每個自由度會分到一樣的能量 $1/2 kT$ 。簡諧振子的系統，位能部分會和動能部分會分到一樣多的能量，因此兩個 $1/2 kT$ 合起來就是一個 kT 了。

每個駐波 mode 會是一個自由度嗎？每個 normal mode 就之一個自由度（ N 個粒子，即 $3N$ 自由度的系統會產生 $3N$ 個 normal mode）。各自獨立的鈍氣原子氣體是如此、雙原子分子構成的氣體是如此（詳見雙原子分子氣體的比熱問題）、全部原子都互相吸引而內聚的液體，或原子間以鍵結固定起來而只剩振動的固體，

李明憲的個人資料 - 漢江大

量子的誕生

163.13.111.54/high-school_math/the_birth_of_quanta.html

能量均分原理

在平衡的情況下，每個自由度會分到一樣的能量 $1/2 kT$ 。簡諧振子的系統，位能部分會和動能部分會分到一樣多的能量，因此兩個 $1/2 kT$ 合起來就是一個 kT 了。

每個駐波 mode 會是一個自由度嗎？每個 normal mode 就之一個自由度（ N 個粒子，即 $3N$ 自由度的系統會產生 $3N$ 個 normal mode）。各自獨立的鈍氣原子氣體是如此、雙原子分子構成的氣體是如此（詳見雙原子分子氣體的比熱問題）、全部原子都互相吸引而內聚的液體，或原子間以鍵結固定起來而只剩振動的固體，也都遵守這個能量均分原理。

在此提供一個圖像，試想，用彈簧一個接一個串起來的質量塊，將一塊拉離其平衡位置後立即釋放，問振動會留在那顆被拉以及附近的質量塊？還是會遍及所有的質量塊？答案是，能量會散佈分配到所有可能的模式中。

電腦模擬（自行習作）：以彈簧—質量串列來模擬能量均分現象

延伸議題：[Fermi-Pasta-Ulam](#)

分析並算計駐波模式

將上述觀念用在空腔輻射內的駐波（駐波是空腔內電磁波唯一可持續存在的振動模式），一種可能的駐波就是一個 normal mode，一個獨立的自由度，因此根據能量均分原理，它只能分到一份 $1/2 kT$ 的能量。現在我們有一個可以評估各頻率（波長）釋放多少能量的基礎了，我們只需要分析每種特定頻率能在空腔中建立多少不同的駐波模式，若多，則該頻率分到的能量就多，若少，分到的能量就少。

狀態密度

$$\rho_T(v) dv = \frac{8\pi v^2 kT}{c^3} dv$$

(1) 純幾何
(2) v 與 EM 能量 ϵ 關係？

李明憲的個人資料 - 漢江大

量子的誕生

163.13.111.54/high-school_math/the_birth_of_quanta.html

(1) 純幾何
(2) v 與 EM 能量 ϵ 關係？

根據統計力學，波茲曼分佈描述了力學系統之能量 ϵ 與溫度 T 如何決定該狀態出現的機率 P ：

$$P(\mathcal{E}) = \frac{e^{-\epsilon/kT}}{kT}$$

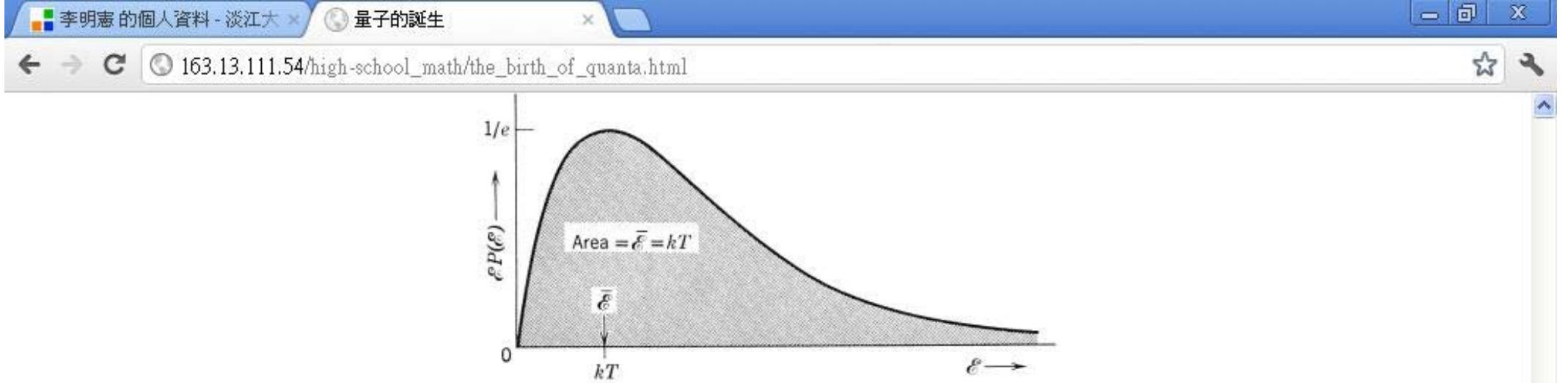
(即事件發生之概率，與該事件總能量及當時整個系統溫度有關)

其中的振子能量 ϵ ，對某頻率電磁波而言（它是一個 SHO，動能得 $1/2$ 、位能得 $1/2$ ，故為 kT 。另外，它是一個橫波，故有兩個自由度），其在溫度 T 時的平均能量是

$$\bar{\epsilon} = kT$$

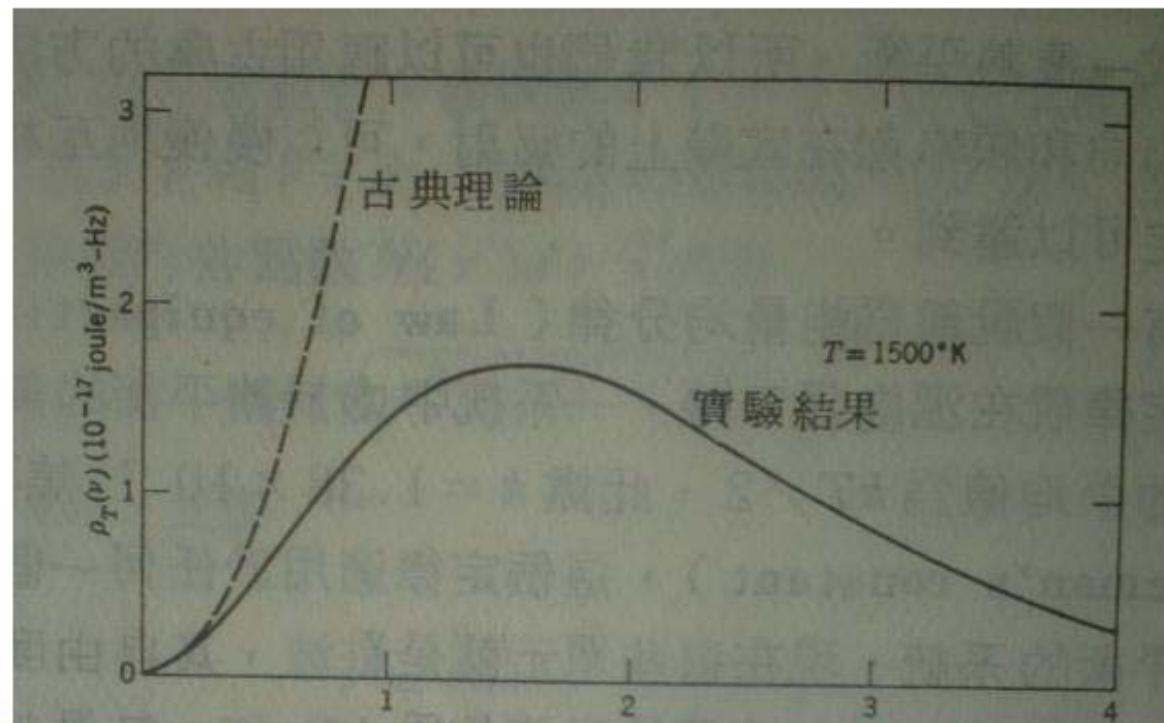
如下圖

The graph shows a curve representing the probability distribution $P(\epsilon)$ of finding a system in state ϵ . The vertical axis is labeled $P(\epsilon)$ and has a point $1/kT$ marked. The horizontal axis is labeled ϵ and has points 0 , kT , and $\bar{\epsilon}$ marked. The curve starts at $(0, 1/kT)$ and decreases monotonically towards the x-axis as ϵ increases.



古典型論的問題

Rayleigh-Jeans 公式



李明憲的個人資料 - 漢江大

量子的誕生

163.13.111.54/high-school_math/the_birth_of_quanta.html

普朗克的改造

普朗克鑽研黑體輻射的問題多年，想從理論上找一個理論來完全解釋其頻譜與溫度的關係

Eisberg & Resnick 量子物理教科書的第二版提到，在 1900 年普朗克提出一個分佈來同時符合 "插值，interpolate" 高頻時的 Wein 公式及低頻時的 Rayleigh-Jeans 公式。（但同一教科書的第三版又選擇不去介紹這些細節。）

亦參見 維基百科 [Planck's law](#)

以下是他著名的光譜能量密度公式

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

其想法如下：

The top graph shows the probability density $P(E)$ versus energy E . The y-axis has marks at 0 and $1/kT$. The curve starts at $1/kT$ on the y-axis and decreases towards the x-axis. A vertical arrow points down from the peak of the curve to a point labeled \bar{E} on the x-axis. A horizontal arrow points right along the x-axis.

The bottom graph shows the spectral energy density $u(v, T)$ versus frequency v . The y-axis has marks at 0 and $1/e$. The curve starts at $1/e$ on the y-axis, peaks, and then decreases towards the x-axis. A shaded area under the curve is labeled "Area = $\bar{E} = kT$ ". A vertical arrow points down from the peak of the curve to a point labeled \bar{E} on the x-axis. A horizontal arrow points right along the x-axis.



他含蓄而保留地引入 "熱(電磁)輻射的能量" 是量子化的觀念，如此導致：

- (0) 如果振子能量連續，依古典理論之結果，平均能量恰爲 kT
- (1) 如果振子能量不連續，但 $\Delta\epsilon \ll kT$ ，平均能量仍接近 kT
- (2) 如果振子能量不連續，但 $\Delta\epsilon \sim kT$ ，平均能量小於 kT
- (3) 如果振子能量不連續，但 $\Delta\epsilon \gg kT$ ，平均能量 $\ll kT$

上述結果的圖像見下列圖示：

