對於靜止座標系中的觀察者看起來，光走的路徑是斜邊，它的長度若是與平移的部分來比，基於光速固定原則，是 c : u 的比例，也就是說，（基於畢氏定理）與垂直邊的長度比例是 c : sqrt(c^2 - u^2) 。現在靜止觀察者替移動觀察者想，這道光在移動座標系中走的不是 c 比例的長而是 sqrt(c^2 - u^2) 比例的長，而光線發射到偵測一樣是要滿足 $dx^2 - c^2t^2 = 0$ 的情況下，唯有 (靜止觀察者認爲移動觀察者的) 時鐘變慢。

$$\mathrm{sqrt}(c^2-u^2)\, t = c\, t'$$

$$t = t' / \mathrm{sqrt}[\ 1-(u/c)^2\ ]$$

重要結論 : 不只空間座標要轉換 ，時間的也要。

範例 : 車廂中間點向前後同時發球 車上觀察者認爲 同時 到達，地面 觀察者認爲 不同時 到達。(其他類似的有趣例子還很多)

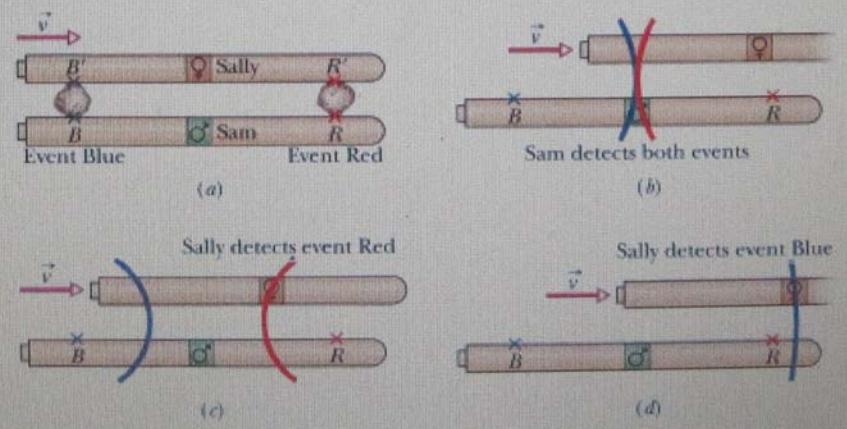


FIG. 37.4 The spaceships of Sally and Sam and the occurrences of events from Sam's view. Sally's ship moves rightward with velocity $\vec{v}$. (*a*) Event Red occurs at positions *RR'* and event Blue occurs at positions *BB'*; each event sends out a wave of light. (*b*) Sam simultaneously detects the waves from event Red and event Blue. (*c*) Sally detects the wave from event Red. (*d*) Sally detects the wave from event Blue.

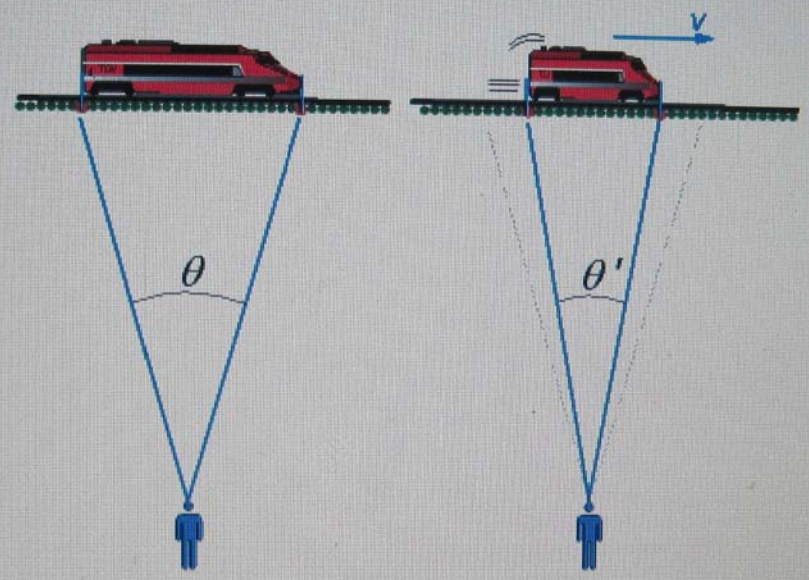
A study of Fig. 37.4 shows Sally and the expanding wavefront from event Red

163.13.111.54/high-school_math/relativity.html

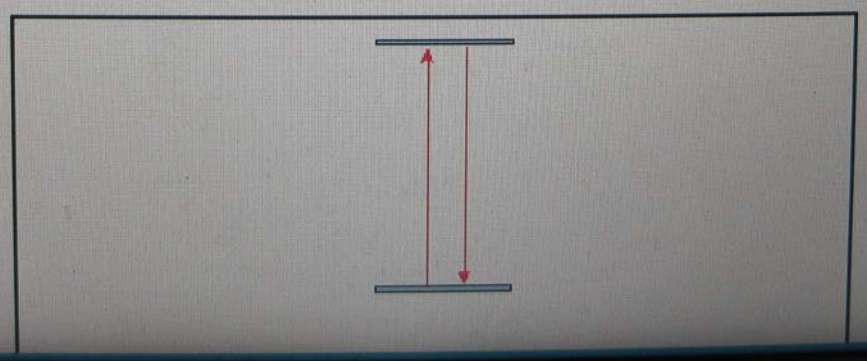
座標、長度、時間、速度相加、質能互換

在靜止的觀察者看來，在動的動體或系統會：

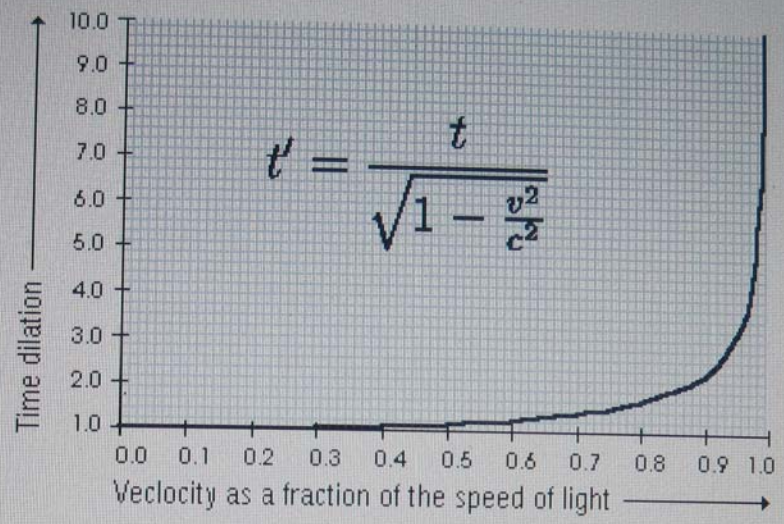
長度縮短



時間膨脹 (Time Dilation)



利用華氏定理，並認定光在任何慣性座標都是同一個值 c 。



（註：上圖中之 t 即 t_0 也就是上一節式子的 t'）

質量增加

$$M = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

（一些專家主張只談 "靜止質量" 與 "相對運動下的動量"，避免談這種隨速度改變之談相對質量。）

自動幫你試算的網頁 http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/tdil.html

速度相加公式

愛因斯坦推導出

$$s = \frac{v+u}{1+(vu/c^2)}.$$

有別於伽利略的

新的動量與能量公式

動量

不再是 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ，而是

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u}$$

其中 **u** 是某觀察者看到的速度，而 m 永遠指的是靜止質量。這樣定才能滿足動量相關定律（如動量守恆）在相對論中對所有觀察者定律不變。

Halliday 課本教法如下：需重新定義動量，以使動量守恆定律適用於不同相對速度的觀察者：

$$p = m \times \text{觀察者座標系中之距離} / \text{靜止座標系中之時間} = m\,\Delta x / \Delta t_0$$

力

力的正確公式是

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$$

（不能再用 $F = m a$，即使有所謂的相對性質量 m_r，也不能直接把 m_r 代入 $F = m_r a$ ，Giancoli 叮嚀）

（ 爲什麼一定要這樣定？重 4-vector, 4-velocity, 4-momentum 一路推廣 <它們被要求滿足 勞倫茲 / 明可夫斯基轉換> 就很清楚 ）

能量

先只考慮動能（位能在此無關），本來是 $1/2\, m v^2$，但在相對論下，動量定義已經不同，

能量公式的推導

$W = \int F\, dx = \int dp/dt\, dx$

其中 $dp / dt = d(\gamma m \mathbf{u}) / dt = m/[(1 - v^2/c^2)^{(3/2)}]\, dv/dt$

〈積分過程見課本〉

功－功能定理繼續適用，即 $\Delta K = W$ ，則得

$K = (\gamma-1)\, m\, c^2$

故

$E = \gamma m\, c^2$

上式 E 是相對論下之總能

動量－能量關係

非相對論下 $E = p^2 / 2m$ ，在相對論下

由於 $E = \gamma m\, c^2$ 、$p = \gamma m\, v$，而有

$E^2 = p^2\, c^2 + m^2\, c^4$

請注意這個式子中沒有 γ、β 等相對速度有關的量，上式是一個滿足不變性的方程式。其中

$m^2\, c^4 = E^2 - p^2\, c^2$ 或 $m^2 = (E / c)^2 - p^2$ 是一個座標轉換不變量。

最有名的物理公式

上式 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ，在靜止的狀態（或座標系） $v = 0$ ，故 $p = \gamma m v = 0$

得 $E^2 = m^2 c^4$，即

$E = m c^2$

採用數學（幾何）的語言：轉時間軸

轉動一向量其長度保持，只是參考座標的不同。換句話說，兩者都靜止，只是各自座標系方向定位不同，則一個旋轉就可以把兩者關聯起來。

至於有相對速度的時候，若是速度可直接加成的伽利略時空，則只是作 $x' = x + vt$ 這種修改而已。然而，現在我們知道，要滿足長度會縮短的那個才是符合相對論的要求。我們必須要採行一種新的轉換方式，才能現表出像長度約縮及時間延遲（膨脹）這些現象。

這就導致了定義 明可夫斯基 (Mikowski) 空間，而 Lorentz 轉換的位階就成了該空間中的一種旋轉。維基百科上有清楚的進一步說明：http://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_special_relativity

在定義了 Minkowski 時空中之 "距離" 是 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 的情形下，問怎樣的轉換對於在此一新距離定義下的在兩個不同速度的觀察者而言，該距離都是不變的，則自然就會導出 Lorentz 轉換公式。

Roger Penrose 說是 Minkowski 時空（spacetime）的觀念提出之後，愛因斯坦相對論的架構才算完成，可見其重要性。

所以空間到底是三度還是四度？（有什麼差？）