

能量公式的推導

$$W = \int F dx = \int dp/dt dx$$

$$\text{其中 } dp / dt = d(\gamma m \mathbf{u}) / dt = m[(1 - v^2/c^2)^{3/2}] dv/dt$$

(積分過程見課本)

功—功能定理繼續適用，即 $\Delta K = W$ ，則得

$$K = (\gamma - 1) m c^2$$

故

$$E = \gamma m c^2$$

上式 E 是相對論下之總能

動量—能量關係

非相對論下 $E = p^2 / 2m$ ，在相對論下

由於 $E = \gamma m c^2$ 、 $p = \gamma m v$ ，而有

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

請注意這個式子中沒有 γ 、 β 等相對速度有關的量，上式是一個滿足不變性的方程式。其中

$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ 或 $m^2 = (E/c)^2 - p^2$ 是一個座標轉換不變量。

最有名的物理公式

上式 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ，在靜止的狀態（或座標系） $v = 0$ ，故 $p = \gamma m v = 0$

得 $E^2 = m^2 c^4$ ，即

$$E = m c^2$$

採用數學（幾何）的語言：轉時間軸

轉動一向量其長度保持，只是參考座標的不同。換句話說，兩者都靜止，只是各自座標系方向定位不同，則一個旋轉就可以把兩者關聯起來。

至於有相對速度的時候，若是速度可直接加成的伽利略時空，則只是作 $x' = x + vt$ 這種修改而已。然而，現在我們知道，要滿足長度會縮短的那個才是符合相對論的要求。我們必須要採行一種新的轉換方式，才能現表出像長度約縮及時間延遲（膨脹）這些現象。

這就導致了定義 明可夫斯基 (Minkowski) 空間，而 Lorentz 轉換的位階就成了該空間中的一種旋轉。維基百科上有清楚的進一步說明：http://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_special_relativity

在定義了 Minkowski 時空中之 "距離" 是 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 的情形下，問怎樣的轉換對於在此一新距離定義下的在兩個不同速度的觀察者而言，該距離都是不變的，則自然就會導出 Lorentz 轉換公式。

Roger Penrose 說是 Minkowski 時空 (spacetime) 的觀念提出之後，愛因斯坦相對論的架構才算完成，可見其重要性。

光及光的速度那麼特別嗎（這不是近代物理，仍是當前問題）

光到底是什麼東西？

原來光速是的時空結構的一部分。

那東西與光有什麼關係？

原子中的原子核與電子之間，是電磁作用力束縛在一起的。

那爲什麼其他的所有東西速度不是光速、且也不固定？

其他東西有質量，其速度視動能而定。

是不是所有無質量的東西（基本粒子）都只有一種速度，就定是光速？

根據相對論的要求的確必須這樣（想想質量增加的公式）

那（靜止）質量是什麼？

是來自與希格斯粒子交互作用嗎？LHC 強子對撞機 2009 年啓用，想找答案的第一個線索（粒子碎片）。

狹義相對論的印證與應用

beta-射線在磁場中彎折的角度，與質量(或"動量"較妥)有關

飛機上的鐘走得比地上慢

全球衛星定位系統（衛星導航）－ [GPS](#)

原子裏的近光速的電子

相對論量子力學－電子自旋的發生

各種有趣的悖論

相對論的結果由於與人們日常生活經驗有差距，因而引發了觀念上看似矛盾的"推論"（所謂的thought experiment）：

Twin paradox

雙胞胎一個在地球一個乘火箭去旅行，....

矛盾點：太空（高速）旅行回來，兩個都比對系年輕，矛盾。

解釋：坐太空船的，要折返回來的那一個較年輕，分別從地球觀點與太空船觀點皆如此。

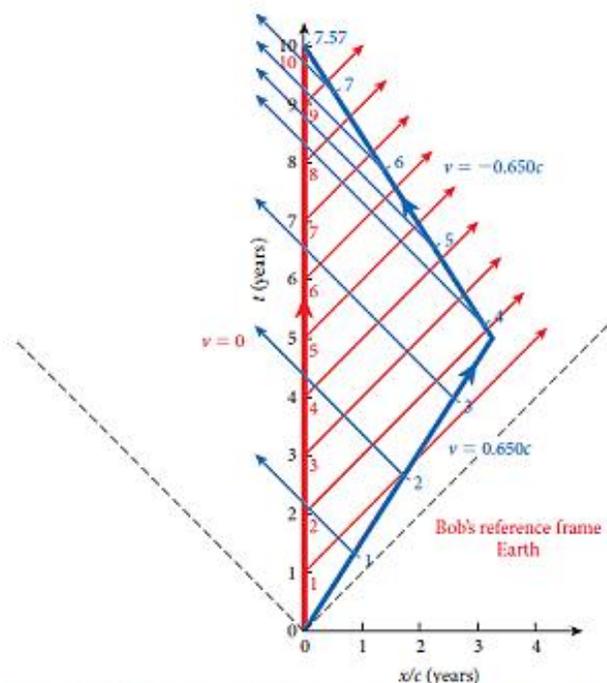


FIGURE 35.9 Plot showing the velocity of the two twins in Bob's reference frame, which is at rest on Earth. The thick, vertical red line represents Bob's trajectory. The two thick blue lines depict Alice's trajectory. Thin red lines labeled by red numbers (corresponding to the years since Alice left) represent Bob's birthday messages. Thin blue lines labeled by blue numbers (also corresponding to the years since Alice left) depict Alice's birthday messages. The dashed lines show the

各種有趣的悖論

相對論的結果由於與人們日常生活經驗有差距，因而引發了觀念上看似矛盾的“推論”（所謂的thought experiment）：

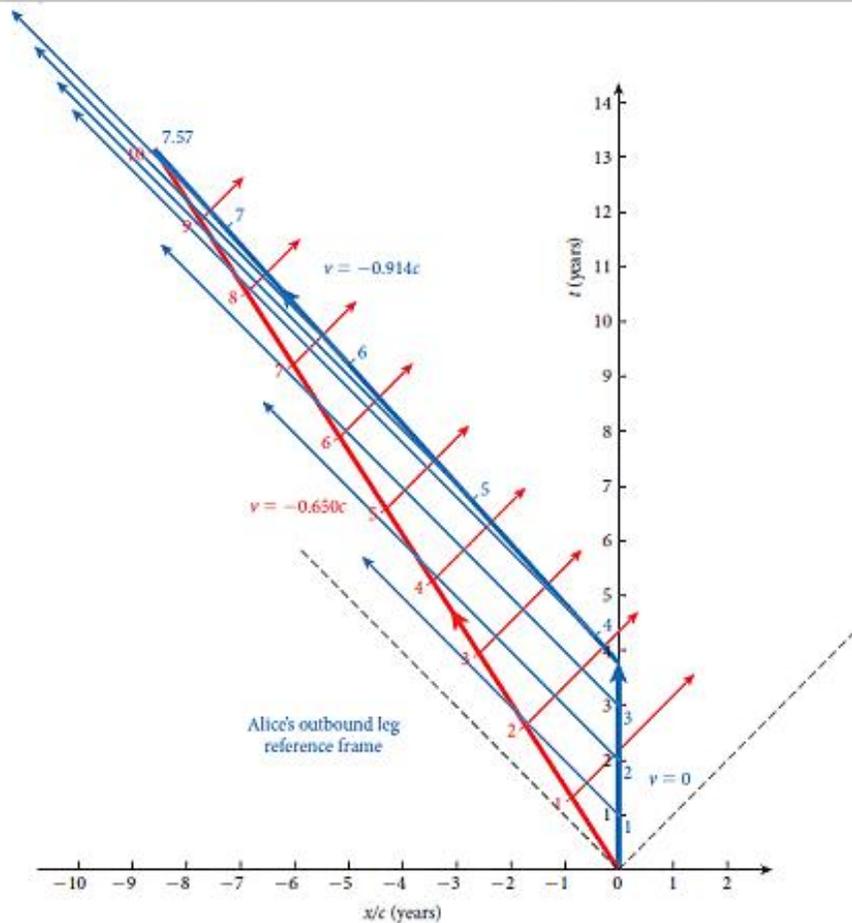


FIGURE 35.10 Plot showing the velocity of the two twins in the reference frame of Alice's outbound leg. The thick red line represents Bob's trajectory. The two thick blue lines depict Alice's trajectory. Thin red lines labeled by red numbers corresponding to the year represent Bob's birthday messages. Thin blue lines labeled by blue numbers corresponding to the year depict Alice's birthday messages. The dashed lines represent the light cone at $t = 0$.

各種有趣的悖論

相對論的結果由於與人們日常生活經驗有差距，因而引發了觀念上看似矛盾的"推論"（所謂的thought experiment）：

廣義相對論：重力（質量）與時空 [公式篇]

非歐幾何（用於描述不是平坦的空間）

微分幾何（局部仍是平滑的變化，像是可使用微分的場合時那樣）

空間的度量

度量 matric 是將向量求出長度值的算子，如二度、三度歐氏空間的是簡單的單位矩陣 I。它是張量的形式因此又叫 metric tensor。

（兩點間路徑最短的不再是直線）

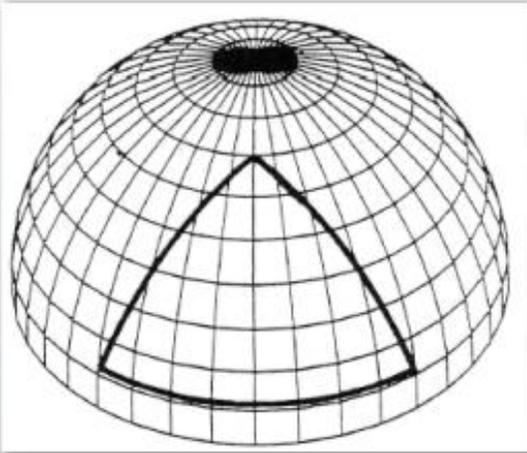


各種有趣的悖論

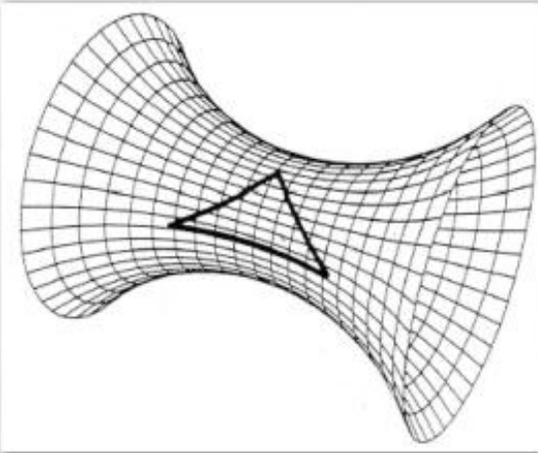
相對論的結果由於與人們日常生活經驗有差距，因而引發了觀念上看似矛盾的"推論"（所謂的thought experiment）：

三角形內角和也不再是 180 度

Curved Space: $k=+1,-1$



spherical geometry: $k=+1$
 $U_o < 2\pi r$; $F_o < \pi r^2$; $\Sigma_{\Delta} > 180^\circ$



hyperbolic geometry: $k=-1$
 $U_o > 2\pi r$; $F_o > \pi r^2$; $\Sigma_{\Delta} < 180^\circ$

四次走固定距離再向左轉會走回位，方向也同，這是平坦空間。（三次就轉回來了了的範例）

重要的訊息是，它表現在大尺度上與平坦空間有差異，而小範圍內仍是平坦的。