

# 相對論

## 對物理定律的期待

### 時時適用（古今）

現在學的定律，以後不能用？

### 處處適用（中外）

出國留學學的，回國竟不能用？

### 在運動中也對？

一定不對，不然剎車為什麼會跌倒（不是靜者恆靜嗎？）（平移運動）

甩水桶轉，水不落下（離心力）；蘋果會掉下來（萬有引力），月球為什麼不會？（旋轉、轉動）

### 退一步，接受沒有運動（即靜止）時適用的規則作物理定律？

那，什麼叫做"靜止"？

如果沒法定出那一個絕對靜止的座標系，則退而求其次，希望(1)了解同一物理定律適用（物理現象的表現可以不同）的一系列參考座標。並且(2)不同參考座標之間的現象，我們也可以精確轉換，也就是說，知道一的座標系中的現象大小，可以預測同一事件在另一個座標系被觀察到的大小。

### 怎樣關係的兩個不互相靜止的座標系，最符合同一物理定律的要求？

### 慣性座標

慣性座標系：意指未加速的座標，等速移動的座標系都算是。

一個有用的物理定律，是具有在慣性座標系間轉換的不變性 (invariance) 的。例如牛頓運動定律之的  $f=ma$ ，不管要用  $x$  的座標系還是  $x'$  的座標系來表示，只要它們都是無加速度的慣性座標系，也就是說  $x$  與  $x'$  之間的關係是用  $x = x' + vt$ ，則  $f=ma$  及  $f = ma'$  這樣的形式在任何慣性座標都是一樣的（大家可以自己代代看）。

（Maxwell 方程比牛頓定律晚了200年，比伽利略晚300年。）

### 伽利略與牛頓的時間與空間

那麼，在慣性座標系之間，與時間、空間有關的物理量如何轉換？以速度以例：

火車行駛時速五十公里、車上乘客靜在車廂內活動位置  $x'$ ，則乘客對地面速度時速  $v$ ，其對於地面的位置  $x$  可被表示為

$$x_{ground} = x_{train} + v_{train} * t$$

火車行駛時速五十公里、車上乘客向前以球速二十公里投擲棒球，則對於地面而言球速是時速七十公里。速度會相加的這回事，若從寫公式的角度而言，推導過程如下：

$$x_{ball\_ground} = x_{ball\_train} + v_{train} * t$$

其中

$$x_{ball\_train} = x_{ball\_train\_0} + v_{ball\_train} * t$$

上式代入上上式得

$$x_{ball\_ground} = x_{ball\_train\_0} + v_{ball\_train} * t + v_{train} * t$$

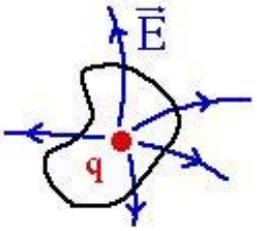
速率是位置隨時間變化

$$\begin{aligned} v_{ball\_ground} &= dx_{ball\_ground}/dt = 0 + v_{ball\_train} + v_{train} \\ &= v_{ball\_train} + v_{train} \end{aligned}$$

# Maxwell's Equations

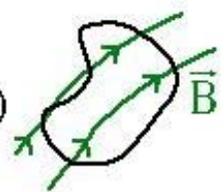
$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gauss's Law



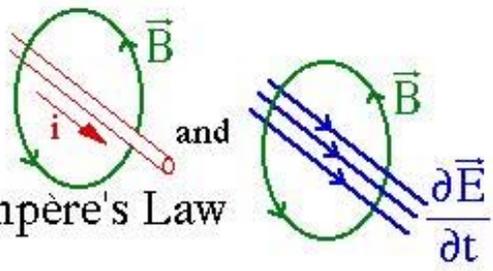
$$\oiint \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

(no monopoles)



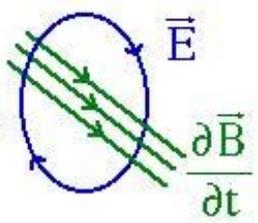
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Ampère's Law



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday's Law



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## 補充：光速量測的歷史

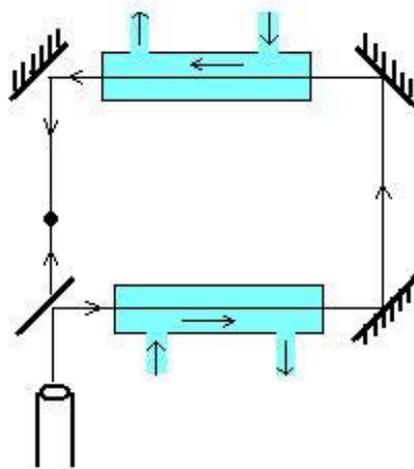
## Fizeau 實驗

光速在介質中是慢下來的  $c/n$ ，Fresnel 認為流動介質會進一步 **部分地** 影響通過它的光束之光速。他認為同方向移動介質（如流體）中的光速會是

$$V = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

而不是  $V = c/n + v$ ，這樣他才能解釋為何地表周圍的以太似乎是靜止的，換言之，是因為上式括號裏的  $1 - 1/n^2$ （即所謂的 Fresnel 拖曳係數 (drag coefficient)）很小，該加上的流速  $v$  之效應才沒有突顯到介質中光速  $c/n$  上。（另外，真空的折射率  $n = 1$ ，一般氣壓下空氣的折射率  $n = 1.0003$ 。）

1851 年 Fizeau 用干涉儀與鍍銀半透片進行了以下實驗（詳見維基百科<sup>[2]</sup>），並 **印證**（僅 10% 誤差，見參考資料）了 Fresnel 的假想，他真的量到了上式



觀念示意圖

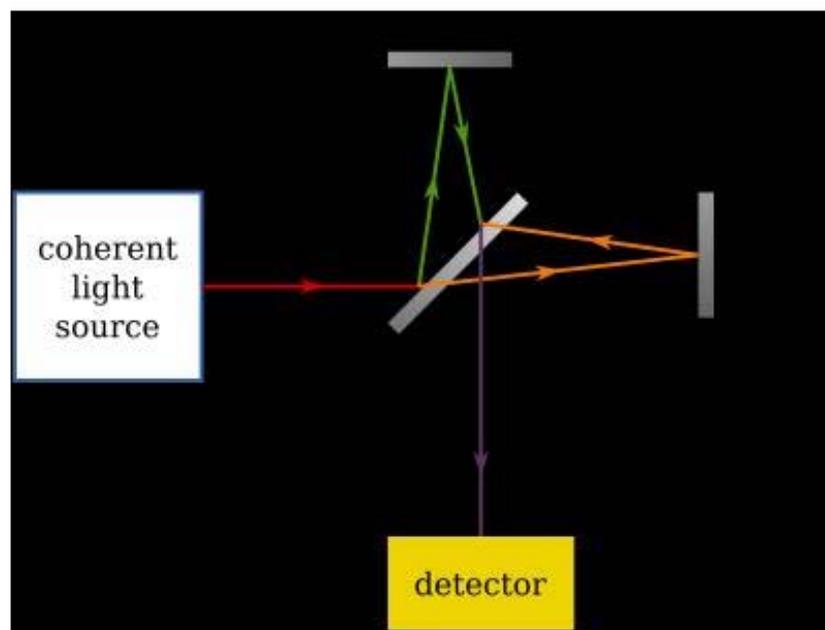
邁可森－莫利 (Michelson-Morley) 之導致確定的光速恆定實驗 (有人說這最有名的失敗實驗)

1887 年，

可見光光波的波長非常短 (3000 埃到 7000 埃)，光速也很快，因此差一點點距離就可以在干涉條紋上看出來。地球有自轉及公轉，若以太在宇宙中是靜止，則地球對之有相對運動。當然還是有人懷疑地球周圍的以太可能被地球帶著走，像大氣一樣。但這想法並沒能提供有進一步證明或是反證的機會 (然後相對論被實驗證實後，以太的不存在也就定案了)。

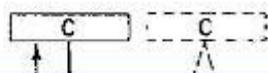
技術上，邁可森需要同一批光子 (同調光) 走互相垂直的兩個不同路徑。

Michelson-Morley 實驗裝置如下：



兩臂各長 11 公尺，以大理石為底座，裝置浮在水銀上以減振，同時也可以轉動。

此實驗的分析



## 勞倫茲轉換

荷蘭科學家勞倫茲在眾人想"修正"馬克斯威爾方程式不符合伽利略轉換時，發現了用下列方式組去轉換的話，馬克斯威爾方程式可保持原來的形式：

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

為了解釋上述以太實驗似乎地球對其無相對速度增加的疑點，勞倫茲首先提出以太會讓長度約短的機制

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

如果它是真的，則套用在 M-M 上述的結果上時

$$t_1 + t_2 = \frac{(2L/c) \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

兩臂的結果就真的一樣了。