2003 年高一力學課程大要

陳義裕

Lecture 8 簡諧運動

定義：當質量為 m 的粒子在一度空間中受到虎克定律 $F=-kx$ 的支配而運動時，這種運動叫做簡單諧和運動(simple harmonic motion；SHM)，簡稱簡諧運動。這樣一個粒子有時也被稱為簡諧振子(simple harmonic oscillator；SHO)。

我們以前曾經碰過這個例子，而且我們當時也承認一時之間實在不知道要如何去解它的運動方程式：

$$\frac{dx}{dt}=v$$
$$m\frac{dv}{dt}=-kx$$

(其中 v 是粒子的速度)。不過那時候我們另外利用哈米頓原理發展出一套招數去求出一個還頗不錯的近似解來！這一回我們則要勇敢面對它，去把精確解找出來。

首先，我們利用牛頓第二運動定律把運動方程式改記成一個更常見的形式：

$$-kx=F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\equiv m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x\equiv-\omega_0{}^2x$$

其中我們刻意把 k/m 定義成 $\omega_0{}^2$，這是為了日後方便。所以剩下的問題是：什麼樣的函數 $x(t)$ 被微分兩次以後還會跟自己的負值 $-x(t)$ 成正比？

我們才剛學過平面上的等速圓周運動 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))=A(\cos\omega t,\sin\omega t)$，而且我們知道它的運動方程式是

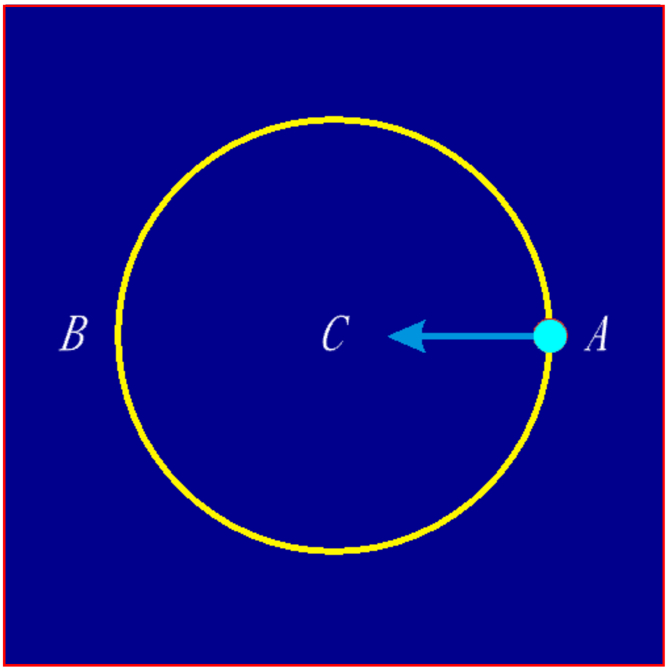
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\omega^2A(\cos\omega t,\sin\omega t)=-\omega^2\vec{r}$$
$$\Rightarrow\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\omega^2\vec{r}$$

由於 $\vec{r}\equiv(x(t),y(t))$，我們立刻看出這道式子的 x 成分(即水平分量)滿足

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

所以它和簡諧振子的運動方程式一模一樣——只要我們要求等速圓周運動的角速度 ω 和 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 相等便可！

我們把這個結果以動畫的方式表現在右圖中。(請點取右圖來觀看動畫)



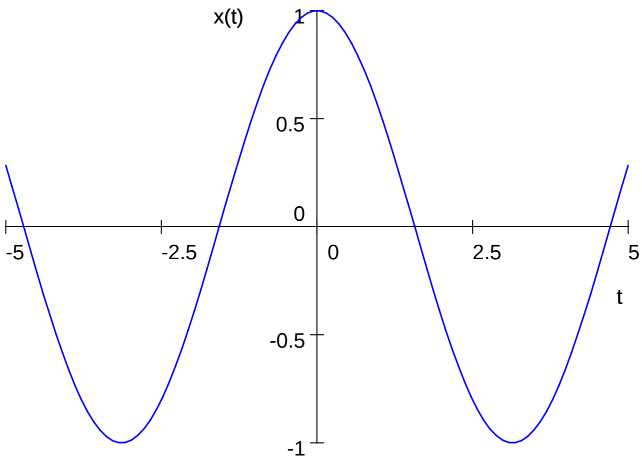
因此，我們得到的解可視為

$$x(t) = A\cos\omega t$$

其隨時間演化之情形如附圖所示，而 A 就叫做是振幅；此粒子顯然是在做週期運動，其週期是

$$2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

而且此週期和運動的振幅 A 沒有關係！



更一般來說，我們應該把它的通解寫成

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

其中θ_0是另外一個常數。當$\theta_0 = 0$的時候，這對應於我們是把粒子運動到最大幅度時當成時間的起點；如果$\theta_0 \neq 0$，則對應的就是更一般的場合(粒子一開始的時候既不是在最大振幅處也不是具有最大的速度)。不過你若知道以下的三角函數公式

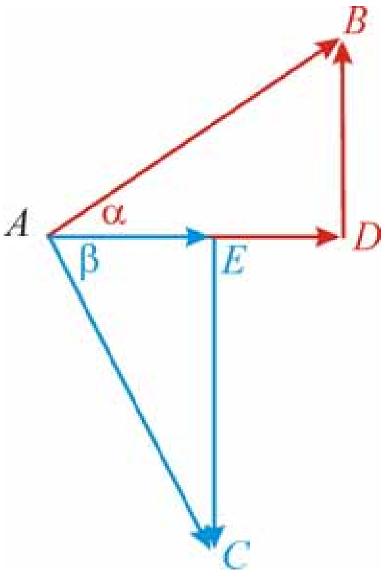
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

的話，則你也會看得出來這意味著$x(t)$一般而言是$\cos\omega t$和$\sin\omega t$的組合。

註：

利用內積的定義以及右邊的圖我們可以很容易推導出上述的三角函數公式：

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos(\alpha+\beta) \equiv \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC})$$
$$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EC}$$
$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos\alpha\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\beta - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\sin\alpha\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\sin\beta$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



定義：

在討論簡諧運動時，我們把以上的ω稱爲角頻率。

結論：

簡諧振子的運動方程式$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$之解$x(t)$可以看成是等速圓周運動的水平投影：$x(t) = A\cos\omega t$——只要我們令等速圓周運動的角速度是$\omega = \sqrt{k/m}$便可。這是一個週期運動，其週期是

$$2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

而且此週期和運動的振幅A沒有關係！

問題：

爲什麼要把簡諧運動單獨拿出來討論？它到底有什麼重要性？

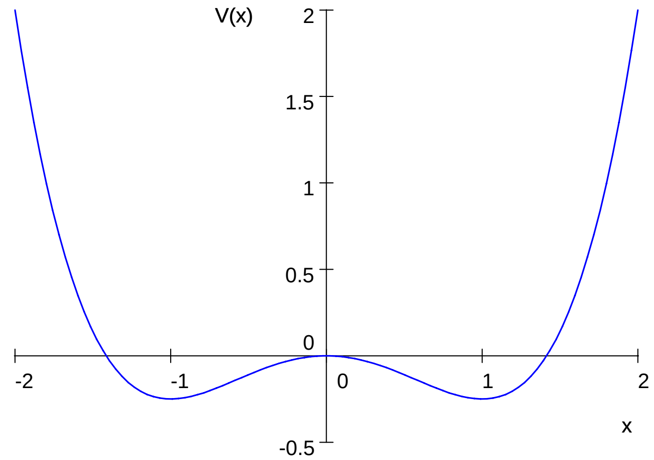
答：

因爲任何達到穩定平衡的力學系統在稍微偏離平衡點時所做的運動通常都可以分解成一些簡諧運動的合成！

例子：

一度空間中的一個單位質量的粒子在以下之位能場中處於靜態平衡(參見附圖)。試求出平衡的位置，並討論它在稍微偏離平衡點時之運動。

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$



解：

粒子在平衡點處不受力，所以

$$F = -\frac{dV}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow x - x^3 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{或} \pm 1$$

對照位能圖，我們知道 $x = \pm 1$ 才是穩定平衡點(因爲位能達到極小值)，所以讓我們以 $x = 1$ 這個點做例子。

令 $x \equiv 1 + \delta x$，其中 δx 是個很小的位移量，則我們可以計算粒子在 $x \approx 1$ 附近所受到的力是

$$F = -\frac{dV}{dx} = -x + x^3$$
$$= (1 + \delta x) - (1 + \delta x)^3$$
$$\approx -2\delta x$$

因此，運動方程式是

$$1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -F$$
$$\Rightarrow \frac{d^2\delta x}{dt^2} = -2\delta x$$

這表示粒子會做角頻率 $\omega = \sqrt{2}$ 之簡諧運動！

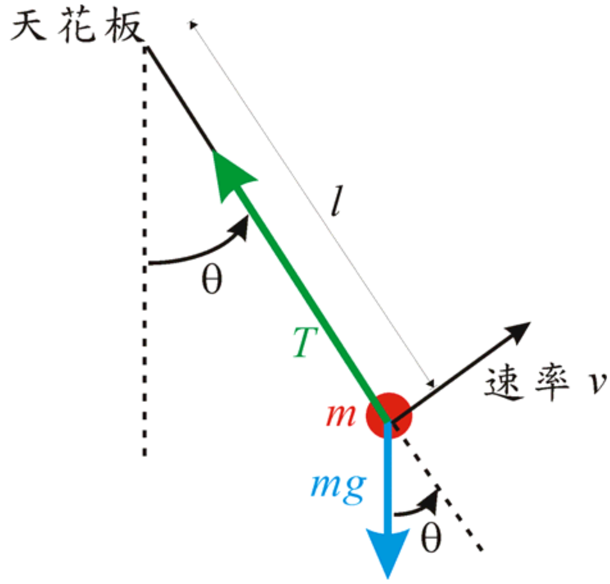
一度空間中的一個單位質量的粒子在以下之位能場中處於靜態平衡：

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

請畫出位能對位置的函數圖形，接著求出平衡的位置，最後並討論它在稍微偏離平衡點時之運動。

例子：(單擺)

一個質量是 m 的粒子被堅固地綁在長度爲 l 但沒有質量的棒子一端。此棒子的另一端則被固定在天花板上。整個系統在重力加速度爲 g 的重力場中懸垂著。這樣一個系統稱爲單擺(simple pendulum)。假如單擺被稍微推離平衡點，且其運動被限制在一個鉛垂平面上，試討論棒子上張力的大小以及單擺的運動情形。



解：

紅色粒子是在繞著天花板的固定點做速率會改變的圓周運動，這就需要一個向心力：

$$\text{向心力} = m \cdot \text{向心加速度} = \frac{mv^2}{l}$$
$$v = \frac{d(l\theta)}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

此向心力必然是由棒子上的張力 T 扣除掉重力 mg 在棒子上的投影量來提供。所以

$$\frac{mv^2}{l}=ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=T-mg\cos\theta$$

只要知道θ隨著時間如何改變，那麼上式便可以用來計算張力T。此外，粒子速率之所以會改變，完全是因爲重力在運動的切線方向有分量之故。所以

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{d\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}=ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$
$$\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

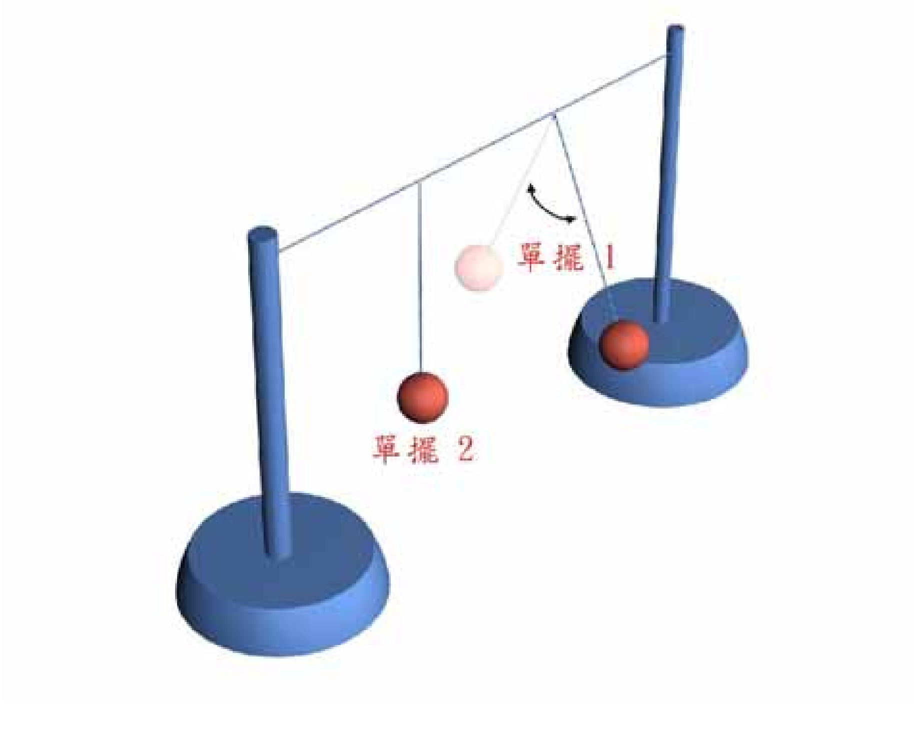
這道式子就是θ的運動方程式，只是我們還是不會解它！唉！

不過，在擺動的幅度很小時，$\sin\theta\approx\theta$(但是角度θ必須是以「弳度」來度量時這道式子才對；以「弳度」來度量時，90 度的角度相當於$\pi/2$弳度)。此時θ的運動方程式就化成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\approx-\frac{g}{l}\theta$$

於是我們又回到簡諧運動的公式，而且知道它的角頻率$\omega=\sqrt{g/l}$。因此，單擺振動的週期就是$2\pi/\omega=2\pi\sqrt{l/g}$！(注意到這個週期竟然和粒子的質量無關！)

例子：(同情擺——這是一個超難的例題！)



兩個相同的單擺被安置在同一根水平棒上做振動(參見附圖)。由於任一個單擺在擺動時都會微微地扭轉水平棒，從而影響到另外一個單擺的運動，因此兩個單擺之間還會有一種要使它們盡量用同一種方式擺動的交互作用力。當兩個單擺的擺幅都很小時，它們的運動方程式可以用以下的公式來描述：

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\omega_0{}^2\theta_1 - c(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\omega_0{}^2\theta_2 - c(\theta_2 - \theta_1)$$

其中c是個很小的正數，它代表了兩個單擺之間那個要使它們盡量用同一種方式擺動的交互作用力。此外，ω_0則是單一一個單擺獨自在擺動時的自然角頻率。換句話說，我們可以把這個系統看成是兩個相同的簡諧振子在交互作用。

假如一開始的時候我們甩動第一個單擺讓它擺動，而讓第二個單擺完全靜止，則請研究一下接下來這兩個單擺的互動情形。(於是你可能就會明瞭這個系統何以被稱爲同情擺了。)

解：

我們說過(雖然沒有證明！)這種運動是可以分解成簡諧運動的組合的，所以我們先來看看這個系統是否有簡諧運動的解。

假設此未知的簡諧運動之角頻率是ω，並假設

$$\theta_1 = A\cos\omega t$$
$$\theta_2 = B\cos\omega t$$

代入運動方程式中便得：

$$\begin{cases} -A\omega^2 = -A\omega_0{}^2 - c(A-B) \\ -B\omega^2 = -B\omega_0{}^2 - c(B-A) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega^2 - \omega_0{}^2 - c)A = -cB \\ (\omega^2 - \omega_0{}^2 - c)B = -cA \end{cases}$$

把此兩道式子相乘以便消去A及B我們便得到

$$(\omega^2 - \omega_0{}^2 - c)^2 = c^2$$
$$\Rightarrow \omega^2 = \begin{cases} \omega_0{}^2 \\ \text{或}\,\omega_0{}^2 + 2c \end{cases}$$
$$\Rightarrow \omega = \omega_{1\text{或}2}$$

$$
其中 \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^{\ 2} + 2c} \\ \quad \approx \omega_0 + \dfrac{c}{\omega_0} = \omega_1 + \dfrac{c}{\omega_0} \end{cases}
$$

(注意：ω_2和ω_1很接近，因爲根據假定c是很小的正數。) 當$\omega = \omega_1$時我們可以代回原方程式去解出$A = B$，而當$\omega = \omega_2$時我們則有$A = -B$。

註：
這兩個解很有意思！ $A = B$對應的是兩個單擺用完全相同的方式在振盪，所以它們在任一瞬間的偏移角度都是一樣的。也因此，它們之間就不會有透過水平棒去做「我想把你扭成和我一樣運動」的交互作用。這就說明了爲什麼這個振動模式的頻率仍然是ω_0。 反過來，$A = -B$對應的是兩個單擺用剛好相反的方式在振盪，所以它們在任一瞬間的偏移角度都是剛好相反。這就使得它們之間永遠有一個透過水平棒去做「我非常想把你扭成和我一樣運動」的交互作用。這個增強的回復力正是爲什麼此時振動模式的頻率會變大成ω_2的原因。

既然已找出了這兩個簡諧運動的解，則根據前面所宣稱的說法(但是沒有證明！)，我們知道兩個單擺的振動是可以寫成這兩種簡諧運動的合成的。所以我們做以下的嘗試：

假設

$$
\theta_1 = D\sin\omega_1 t + E\sin\omega_2 t
$$
$$
\theta_2 = D\sin\omega_1 t - E\sin\omega_2 t
$$

(我們只用正弦函數的原因是：這樣就自動滿足在一開始的時候兩個單擺是處於鉛垂狀態，沒有角度的偏移。) 由於我們要求第二個單擺在一開始的時候完全不動，所以

$$
\left.\frac{d\theta_2}{dt}\right|_{t=0} = 0
$$
$$
\Rightarrow \omega_1 D - \omega_2 E = 0
$$

第一個單擺在一開始的時候則有一個初始角速度u_0 (因爲我們將之甩動！)，所以我們有

$$
\left.\frac{d\theta_1}{dt}\right|_{t=0} = u_0
$$
$$
\Rightarrow \omega_1 D + \omega_2 E = u_0
$$

從這些聯立方程式我們可以解得

$$D = \frac{u_0}{2\omega_1}$$

$$E = \frac{u_0}{2\omega_2}$$

因此，

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \\ \theta_2(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t - \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \end{cases}$$

現在注意到底下的事項：

1. 如果 t 不是很大，則 $\omega_2 t \approx \omega_1 t$ ，於是我們有

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \approx \dfrac{u_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t \\ \theta_2(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t - \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \approx 0 \end{cases}$$

因此第二個單擺持續保持不動。

2. 可是如果時間 t 很長而滿足 $\dfrac{c}{\omega_0}t \approx \pi$ 時，則

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \approx \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin(\omega_1 t + \pi) \\ \qquad = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t - \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_1 t \approx 0 \\ \theta_2(t) = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t - \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_2 t = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t - \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin(\omega_1 t + \pi) \\ \qquad = \dfrac{u_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \dfrac{u_0}{2\omega_2}\sin\omega_1 t \approx \dfrac{u_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t \end{cases}$$

結果卻變成第一個單擺不太動，而第二個單擺的振動幅度卻很大！換言之，第一個單擺的能量已經整個轉移到第二個單擺上了！

更一般來說，如果我們有 N 個簡諧振子互相交互作用，那麼整個系統就會有 N 個「自然頻率」。 舉個極端的例子：一塊石英晶體裡面也許含有 10^{23} 顆原子規則地排列在一起。當溫度很低時，這些原子可能被固定在空間中特定的週期結構中達到穩定平衡、而且動彈不得。可是當溫度升高時，這些原子會因爲受熱擾動的影響而開始偏離平衡點做小振幅的振動。此時石英晶體會有 3×10^{23} 個「自然頻率」(3 是因爲每顆原子均可以在三度空間中的任一個方向做振動，因而可視爲是 3 個等效的簡諧振子)。如果我們有辦法算出來這些自然頻率以及在給定的溫度下

對應於某個自然頻率的振動能量有多少，那麼我們就能加總算出該晶體當時的總能量值。當然我們也就有辦法算出來每升高攝氏一度時這塊晶體增加了多少能量。算出來的這個數值顯然就是晶體的熱容量。於是我們便可以透過微觀的模型去推導出這塊晶體的熱性質來！光從這一點來看，我們也可以理解爲什麼簡諧運動是一個很重要的物理課題。

以下則是其他生活上的簡諧運動實例，請點選個別圖形來看影片。

嬰兒搖搖椅

搖晃的盆栽

懸垂的讀書燈